개념원리®

문제기본서

RPM

수학 Ⅱ

정답과 풀이

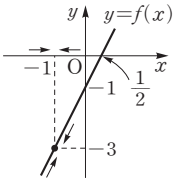
01 함수의 극한

교과서 문제 정/복/하/기

본문 7쪽, 9쪽

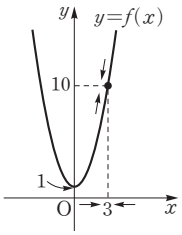
0001 $f(x)=2x-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1}(2x-1)=-3$ 답 -3



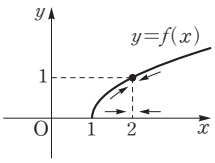
0002 $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 10에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to3}(x^2+1)=10$ 답 **10**



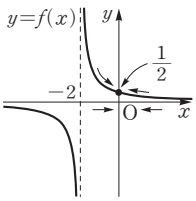
0003 $f(x)=\sqrt{x-1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}=1$ 답 **1**



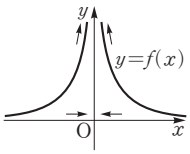
0004 $f(x)=\frac{1}{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\frac{1}{2}$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$



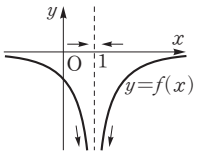
0005 $f(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$ 답 ∞



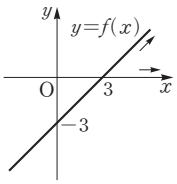
0006 $f(x)=\frac{-1}{|x-1|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to1}\frac{-1}{|x-1|}=-\infty$ 답 $-\infty$



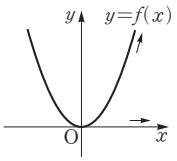
0007 $f(x)=x-3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(x-3)=\infty$ 답 ∞



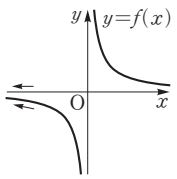
0008 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ 답 ∞



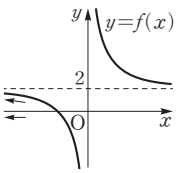
0009 $f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 답 **0**



0010 $f(x)=2+\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ 답 **2**



0011 (1) $\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$

(2) $\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0+}1=1$

답 (1) -1 (2) **1**

0012 (5) $\lim_{x\to-2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to-2-}f(x)=2$

즉, $\lim_{x\to-2+}f(x)\neq\lim_{x\to-2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-2}f(x)$는 존재하지 않는다.

답 (1) **0** (2) **2** (3) **2** (4) **2** (5) **존재하지 않는다.** (6) **2**

0013 $\lim_{x\to-1}(1-3x)=1-3\cdot(-1)=4$ 답 **4**

0014 $\lim_{x\to1}(x^2-4)(x+1)=(1-4)\cdot(1+1)=-6$

답 -6

0015 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3}{x-1}=\frac{9-3}{3-1}=3$ 답 3

0016 $\lim_{x\to 4}7=7$ 답 7

0017 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$
$=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$ 답 -2

0018 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1$ 답 -1

0019 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{x+1}$
$=\lim_{x\to -1}(x+4)=3$ 답 3

0020 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$
$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$
$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0021 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x}$
$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)$
$=4$ 답 4

0022 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=0$ 답 0

0023 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0024 $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{3x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0025 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{1+\frac{2}{x}}=\infty$ 답 ∞

0026 $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\infty$
답 ∞

0027 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ 답 0

0028 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+10x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+10x-x^2}{\sqrt{x^2+10x}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{x^2+10x}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\sqrt{1+\frac{10}{x}}+1}$
$=5$ 답 5

0029 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\right)$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$ 답 1

0030 $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x-3}\left(x-\frac{9}{x}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}\cdot\frac{x^2-9}{x}\right)$
$=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{2}{x-3}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x}\right\}$
$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)}{x}=4$ 답 4

0031 $\lim_{x\to 2}\frac{ax+b}{x-2}=3$이고, $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to 2}(ax+b)=0$
즉, $2a+b=0$이므로 $b=-2a$
$b=-2a$를 주어진 식에 대입하면
$\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{x-2}=a=3$
$\therefore a=3,\ b=-6$ 답 $a=3, b=-6$

0032 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax-b}=-1$이고, $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to 1}(x^2+ax-b)=0$
즉, $1+a-b=0$이므로 $b=a+1$
$b=a+1$을 주어진 등식에 대입하면
$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax-(a+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$
$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+a+1}$
$=\frac{1}{a+2}=-1$
$\therefore a=-3,\ b=-2$ 답 $a=-3, b=-2$

0033 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+2x-3 \le f(x) \le x^2-2x-1$이고

$\lim_{x\to 1}(-x^2+2x-3)=-2$, $\lim_{x\to 1}(x^2-2x-1)=-2$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=-2$ 답 -2

0034 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$\frac{4x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{4x^2+5}{x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{x^2+1}=4$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5}{x^2+1}=4$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=4$ 답 4

유형 익히기 본문 10~16쪽

0035 ① $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$

② $\lim_{x\to 4+} f(x)=1$

③ $\lim_{x\to 5-} f(x)=4$

④ $\lim_{x\to 2+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=-3$

즉, $\lim_{x\to 2+} f(x) \ne \lim_{x\to 2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)$는 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to 3+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)=2$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

0036 ① $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a-} f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

②, ③, ④ $\lim_{x\to a+} f(x) \ne \lim_{x\to a-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0037 ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to 2+} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=2$

즉, $\lim_{x\to 2+} f(x) \ne \lim_{x\to 2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0038 $\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}(x+k)=-2+k$ ㉮

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(-x^2-4x+3)=7$ ㉯

$\lim_{x\to -2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)$이어야 하므로

$-2+k=7$ $\therefore k=9$ ㉰

답 9

단계	채점요소	배점
㉮	$\lim_{x\to -2+} f(x)$의 값 구하기	30 %
㉯	$\lim_{x\to -2-} f(x)$의 값 구하기	30 %
㉰	k의 값 구하기	40 %

0039 $\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)$

$=3+0+3=6$ 답 ②

0040 $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x+1)=1$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} 3=3$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1+3=4$ 답 4

0041 $f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}=\frac{(x-2)(2x+1)}{|x-2|}$

$=\begin{cases} 2x+1 & (x>2) \\ -2x-1 & (x<2) \end{cases}$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x+1)=5$ $\therefore a=5$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(-2x-1)=-5$ $\therefore b=-5$

$\therefore a-b=5-(-5)=10$ 답 ⑤

0042 $\lim_{x\to 1-} f(x)=2$

$1-x=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(1-x)=\lim_{t\to 0-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(1-x)=2+0=2$ 답 ⑤

0043 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to 0+} g(t)=1$

$g(x)=p$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $p=1$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1-} g(f(x))-\lim_{x\to 0+} f(g(x))=1-0=1$ 답 ④

0044 ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to -1+$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(f(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=1$

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(f(x))=f(-1)=-1$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0045 $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=2f(x)-h(x)$이고 $\lim_{x\to1}h(x)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-3g(x)}{3f(x)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3\{2f(x)-h(x)\}}{3f(x)-\{2f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-5f(x)+3h(x)}{f(x)+h(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-5+3\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{1+\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$=-5$ 답 -5

다른풀이 $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1}\{2f(x)-g(x)\}=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)}=0$$

즉, $\lim_{x\to1}\left\{2-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=2-\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-3g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1-3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{3-\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{1-3\cdot2}{3-2}=-5$$

0046 $\lim_{x\to1}f(x)=2$, $\lim_{x\to1}g(x)=a$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3g(x)}{f(x)g(x)-4}=\frac{2+3a}{2a-4}=\frac{1}{2}$$

$4+6a=2a-4$ $\therefore a=-2$ 답 -2

0047 $$\lim_{x\to0}\frac{5x^2-3f(x)}{7x^2+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x-3\cdot\frac{f(x)}{x}}{7x+\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{0-3\cdot3}{0+3}=-3$$ 답 -3

0048 $2f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=h(x)-2f(x)$이고 $\lim_{x\to2}h(x)=6$ ..... ㉮

$$\therefore \lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\{h(x)-2f(x)\}$$

$$=\lim_{x\to2}h(x)-2\lim_{x\to2}f(x)$$

$=6-2\cdot(-2)=10$ ..... ㉯

답 10

단계	채점요소	배점
㉮	$g(x)$를 $h(x)$, $f(x)$에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	$\lim_{x\to2}g(x)$의 값 구하기	60 %

0049 $x-5=t$로 놓으면 $x\to5$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to5}f(x-5)=\lim_{t\to0}f(t)=3$ $\therefore \lim_{x\to0}f(x)=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1+4f(x)}{2-f(x)}=\frac{1+4\cdot3}{2-3}=-13$$ 답 -13

0050 $x-3=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+6)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{1}{t+6}$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

0051 $\lim_{x\to2}f(x)=a$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\{f(x)\}^2-25}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{\{f(x)-5\}\{f(x)+5\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\frac{f(x)-5}{x-2}\cdot\{f(x)+5\}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to2}(x+2)}{\lim_{x\to2}\frac{f(x)-5}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\{f(x)+5\}}$$

$$=\frac{4}{10(a+5)}$$

즉, $\frac{4}{10(a+5)}=\frac{1}{20}$이므로 $a=3$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=3$ 답 ③

0052 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge a)\\ 0 & (x<a)\end{cases}$

이면 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$는 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=1$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=1$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+2g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=\beta$라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{3}[2\{2f(x)+g(x)\}-\{f(x)+2g(x)\}]$$

$$=\frac{1}{3}(2\beta-\alpha)$$

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}0 & (x\ge a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$ 이면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$이지만

$\lim_{x\to a}g(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0053 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(2x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4}{2x-1}$

$=-\dfrac{12}{5}$ 답 $-\dfrac{12}{5}$

0054 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x^2+1)}{f(x)}$

$=\dfrac{16}{f(1)}$

즉, $\dfrac{16}{f(1)}=2$이므로 $f(1)=8$ 답 ①

0055 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\{f(x)\}^2+3f(x)}{x^2f(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\{f(x)+3\}}{f(x)(x^2-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+3}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ 답 **1**

0056 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x+|x|}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x+x}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{x^2+x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{x}{1-x}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ 답 **0**

0057 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{2}{3}$ 답 ④

0058 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right)=-2$ 답 -2

0059 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}f(x)(\sqrt{x}+1)$

$=\lim\limits_{x\to 1}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$

$=3\cdot 2=6$ 답 ②

0060 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3-x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t^2+3t}-t}{\sqrt{t^2-1}-\sqrt{3+t}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{t}}-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}-\sqrt{\dfrac{3}{t^2}+\dfrac{1}{t}}}$

$=\dfrac{1-1}{1-0}=0$ 답 ④

0061 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)-x(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$ 답 **2**

0062 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{x^2-2x+1}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}\right)$

$=2+1=3$ 답 **3**

0063 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{4}{x}}{2-\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{3+3\cdot 0}{2-3\cdot 0}=\dfrac{3}{2}$ 답 ②

0064 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}+x)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+3}-t)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{t^2-2t+3}-t)(\sqrt{t^2-2t+3}+t)}{\sqrt{t^2-2t+3}+t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-2t+3}{\sqrt{t^2-2t+3}+t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-2+\dfrac{3}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{t^2}}+1}$

$=\dfrac{-2}{1+1}=-1$ 답 ③

0065 (1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+2\right)$

$=2+2=4$

(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left\{\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{4}\right\}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{-x^2-2x+3}{4(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{-(x-1)(x+3)}{4(x-1)(x+1)^2}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{-(x+3)}{4(x+1)^2}=-\dfrac{1}{4}$

답 (1) **4** (2) $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

0066 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)=\lim_{t\to\infty}t^2\left(1+\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+2}}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left(t^2\cdot\dfrac{\sqrt{t^2+2}-t}{\sqrt{t^2+2}}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{t^2\cdot\dfrac{(\sqrt{t^2+2}-t)(\sqrt{t^2+2}+t)}{\sqrt{t^2+2}(\sqrt{t^2+2}+t)}\right\}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t^2}{\sqrt{t^2+2}(\sqrt{t^2+2}+t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{t^2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{t^2}}+1\right)}$

$=\dfrac{2}{1\cdot(1+1)}=1$

답 **1**

0067 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{a}{x}}}$

$=\dfrac{2a}{1+1}=3$

$\therefore a=3$

답 **3**

0068 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax^3+x+b)=0$이므로 $a+1+b=0$

$\therefore b=-a-1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{ax^3+x-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(ax^2+ax+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(ax^2+ax+a+1)$

$=3a+1$

$3a+1=7$에서 $a=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore ab=-6$

답 ①

0069 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{2+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{2+a}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2+a}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2+a}}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a-b=0$

답 **0**

0070 $x\to-3$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)=0$이므로 $\sqrt{9+3-3}-3a=0$

$\therefore a=1$

…… ㉮

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}=\lim_{x\to-3}\dfrac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim_{x\to-3}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\dfrac{1}{6}$

$\therefore b=-\dfrac{1}{6}$

…… ㉯

$\therefore a+b=1+\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{6}$

…… ㉰

답 $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	40 %
㉯	b의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	10 %

0071 $x\to-1$일 때, (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(3x^2-x-a)=0$이므로 $3+1-a=0$ $\therefore a=4$

$a=4$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{3x^2-x-4}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(3x-4)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{3x-4}=\frac{2}{7}$$

$\therefore b=\frac{2}{7}$

$\therefore ab=4\cdot\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$ 답 $\frac{8}{7}$

0072 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-a}$에서 $x\to 2$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2-a)=0$이므로 $4-a=0$ $\therefore a=4$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-ax+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-3}=-1$$ 답 ①

0073 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+ax+b}-a)=0$이므로

$\sqrt{b}-a=0$ $\therefore b=a^2$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+ax+a^2}-a}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+ax)(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{2x(\sqrt{x^2+ax+a^2}+a)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+a)(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{2(\sqrt{x^2+ax+a^2}+a)}$$
$$=\frac{2a\sqrt{a}}{4a}=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

$\frac{\sqrt{a}}{2}=1$에서 $a=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=16$

$\therefore a+b=20$ 답 **20**

0074 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1-a^2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax}$$ …… ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면 $2-a^2=0$

$a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore ab=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ③

0075 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-2}=1$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$ $\therefore a=1$

또, $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+c}{x^2+x-2}=-1$에서 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+bx+c)=0$이므로 $1+b+c=0$

$\therefore c=-b-1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx-b-1}{x^2+x-2}$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+b)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+b}{x+2}$$
$$=\frac{2+b}{3}$$

즉, $\frac{2+b}{3}=-1$에서 $b=-5$이므로 $c=-b-1=5-1=4$

$\therefore a-b+c=1-(-5)+4=10$ 답 ⑤

0076 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-1}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 일차함수임을 알 수 있다.

즉, $f(x)=4x+a$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}(4x+a)=-4+a=-3$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=4x+1$이므로

$f(3)=12+1=13$ 답 **13**

0077 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)$$
$$=-b=4$$

$\therefore b=-4$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x(ax+b)$$
$$=a+b=a-4=-2$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x-4)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)(2x-4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}2x(x-1)=4$$

답 **4**

0078 ㈎에서 $f(x)-2x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있으므로 $f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$

㈏에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ $\quad\therefore b=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2x^2+2x+a)$$
$$=a=-3$$

따라서 $f(x)=2x^3+2x^2-3x$이므로

$f(-1)=-2+2+3=3$

답 **3**

0079 주어진 조건에 의하여 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)Q(x)=1$$

$\therefore Q(1)=-1$ …… ㉡

㉠을 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)Q(x)=1$$

$\therefore Q(2)=1$ …… ㉢

㉠에서 $Q(x)$의 차수가 낮을수록 $f(x)$의 차수도 낮고, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 다항함수 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차함수이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$Q(1)=a+b=-1$, $Q(2)=2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $Q(x)=2x-3$이므로

$g(x)=(x-1)(x-2)(2x-3)$

$\therefore g(3)=2\cdot 1\cdot 3=6$

답 ⑤

0080 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x+1}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+3}{3x^2+2x+1}=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

답 ①

0081 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+2로 나누면

$$\frac{3x^2+1}{x^2+2}<f(x)<\frac{3x^2+5}{x^2+2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{x^2+2}=3$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

답 **3**

0082 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{x^2-x-1}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}<\frac{x^2-x+1}{x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

답 ③

0083 모든 양의 실수 x에 대하여 $0<3x+2<f(x)<3x+4$이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$(3x+2)^2<\{f(x)\}^2<(3x+4)^2$

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(3x+2)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(3x+4)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{x^2+1}=9$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)^2}{x^2+1}=9$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=9$

답 **9**

유형 up

본문 17쪽

0084 ① $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{[x]}{x}=\frac{1}{1}=1$

② $0<x<1$일 때, $1<x+1<2$이므로 $[x+1]=1$

$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{x+1}{[x+1]}=\frac{1}{1}=1$

③ $-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$

$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{[x-1]}{x-1}=\frac{-2}{-1}=2$

④ $-x^2+6x-9=-(x-3)^2$이고, $x\to3$일 때 $-(x-3)^2$은 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to3}[-x^2+6x-9]=-1$

⑤ $0<x<1$일 때, $-1<x-1<0$이므로 $[x-1]=-1$
$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{x-1}{[x-1]}=\frac{-1}{-1}=1$ …… ㉠
$-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$
$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{x-1}{[x-1]}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0+}\frac{x-1}{[x-1]}\neq\lim_{x\to0-}\frac{x-1}{[x-1]}$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{[x-1]}$은 존재하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

0085 $\lim_{x\to3+}[x]=3$, $\lim_{x\to3-}[x]=2$이므로
$\lim_{x\to3+}\frac{[x]^2+[x]}{x^2-x}+\lim_{x\to3-}\frac{[x]^2+[x]}{[x]}=\frac{3^2+3}{3^2-3}+\frac{2^2+2}{2}$
$=2+3=5$ 답 **5**

0086 ① $x\to2+$일 때 $f(x)\to0-$이므로
$\lim_{x\to2+}[f(x)]=-1$
② $x\to2-$일 때 $f(x)\to0+$이므로
$\lim_{x\to2-}[f(x)]=0$
③ $x\to-2-$일 때 $f(x)\to0+$이므로
$\lim_{x\to-2-}[f(x)]=0$
④ $x\to-2+$일 때 $f(x)\to0+$이므로
$\lim_{x\to-2+}[f(x)]=0$
⑤ $\lim_{x\to-2+}[f(x)]=\lim_{x\to-2-}[f(x)]=0$이므로
$\lim_{x\to-2}[f(x)]=0$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ①이다. 답 ①

0087 $A(x)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot y=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}x^2$
$B(x)=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x=2x$
$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{xB(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

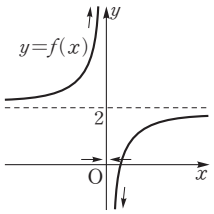
0088 점 P의 좌표를 $(t, 2t^2)$ $(t>0)$, 점 Q의 좌표를 $(0, y)$로 놓으면 $\overline{PQ}=\overline{QO}=y$이므로
$\sqrt{t^2+(2t^2-y)^2}=y$
양변을 제곱하면 $t^2+4t^4-4yt^2+y^2=y^2$
$4yt^2=4t^4+t^2$ $\therefore y=t^2+\frac{1}{4}$
점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로
$\lim_{t\to0}y=\lim_{t\to0}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$
따라서 원의 중심 Q는 점 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$에 한없이 가까워진다. 답 ①

0089 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^4}$이므로 $\overline{OP}=\overline{OQ}$에서 $Q(\sqrt{t^2+t^4}, 0)$
따라서 직선 PQ의 방정식은
$y-t^2=\frac{-t^2}{\sqrt{t^2+t^4}-t}(x-t)$ …… ㉠ ····· ㉮
㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-t^2=\frac{-t^2}{\sqrt{t^2+t^4}-t}\cdot(-t)=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}$
$\therefore f(t)=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+t^2$ ····· ㉯
점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로
$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+t^2\right)$
$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}{t^2}+t^2\right\}$
$=\lim_{t\to0}(\sqrt{1+t^2}+1+t^2)=2$ ····· ㉰
답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	직선 PQ의 방정식 구하기	30 %
㉯	$f(t)$ 구하기	30 %
㉰	$f(t)$가 한없이 가까워지는 값 구하기	40 %

시험에 꼭 나오는 문제 본문 18~21쪽

0090 ㄱ. $f(x)=2-\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

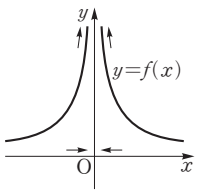


즉, $\lim_{x\to0+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty$,
$\lim_{x\to0-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\infty$
이므로 $\lim_{x\to0}\left(2-\frac{1}{x}\right)$은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to2-}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to2-}\frac{x-2}{-(x-2)}=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x-2)=1$

ㄹ. $f(x)=\frac{|x|}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x^2}=\infty$



따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 ③

0091 ⑤ $\lim_{x\to3}f(x)=3$ 답 ⑤

0092 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq 2) \\ -x+2 & (1\leq x<2) \\ -x^2+3 & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 1-} (-x^2+3)+\lim\limits_{x\to 1+} (-x+2)+\lim\limits_{x\to 3} (x-2)$

$=2+1+1=4$ 답 **4**

0093 $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to -1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(g(x))=f(-1)=0 \quad \therefore a=0$

$f(x)=p$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $p\to 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))=\lim\limits_{p\to 1+} g(p)=1 \quad \therefore b=1$

$\therefore a+b=1$ 답 **1**

0094 ① $\lim\limits_{x\to a}\{-2f(x)\}=-2\lim\limits_{x\to a} f(x)=-2\cdot 3=-6$

② $\lim\limits_{x\to a} 3f(x)g(x)=3\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=3\cdot 3\cdot 2=18$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{g(x)}=2\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$

④ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(2)$

그런데 $f(2)$의 값은 알 수 없다.

⑤ $\lim\limits_{x\to a}[3\{f(x)\}^2+2g(x)]=3\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\}^2+2\lim\limits_{x\to a} g(x)$

$=3\cdot 3^2+2\cdot 2=31$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0095 $3f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=\dfrac{3f(x)-h(x)}{2}$이고 $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2g(x)}{-2f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2\cdot\dfrac{3f(x)-h(x)}{2}}{-2f(x)+\dfrac{3f(x)-h(x)}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4f(x)-2h(x)}{f(x)+h(x)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-2\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{h(x)}{f(x)}}$

$=4$ 답 **4**

0096 $x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t(t+4)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t+4}=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$ 답 ③

0097 ㄱ. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$로 놓으면 $f(x)=g(x)h(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} h(x)=\alpha\beta$

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq a) \\ 2 & (x<a) \end{cases}$ 이면

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이지만 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)라 하고

$f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to a} h(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a} k(x)=\beta$이다.

이때 $f(x)=\dfrac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)+k(x)}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0098 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x^2+x+1)}{(x+1)f(x)}$

$=\dfrac{12}{2f(1)}=2$

$\therefore f(1)=3$ 답 **3**

0099 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$ 답 **1**

0100 ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{2}=1$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0101 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x+4}-x)(\sqrt{x^2+3x+4}+x)}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}$

$=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0102 $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{4-x}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{(\sqrt{4-x}-2\sqrt{1-x})(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}\,(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1-x})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{3}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}\,(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{3}{2(2+2)}=\dfrac{3}{8}$ 답 ③

0103 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^2-4x+a)=0$이므로 $9-12+a=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x-1)(\sqrt{x+1}+2)$

$=8$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=11$ 답 ⑤

0104 $x\to1$일 때, (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-(a+1)$

$b=-(a+1)$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+ax-(a+1)}=\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x+a+1}$

$=\dfrac{1}{a+2}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 $ab=-2$ 답 ②

0105 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$이므로

$a\sqrt{2}-b=0$ $\therefore b=a\sqrt{2}$

$b=a\sqrt{2}$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $a=4$, $b=4\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=16+32=48$ 답 48

0106 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{5x^2}=2$에서

$f(x)-x^3=10x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있으므로

$f(x)=x^3+10x^2+ax+b$

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=-8$에서 $x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=-1+10-a+b=0$

$\therefore b=a-9$

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x^3+10x^2+ax+a-9}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2+9x+a-9)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x^2+9x+a-9)$

$=1-9+a-9=-8$

$\therefore a=9$, $b=0$

따라서 $f(x)=x^3+10x^2+9x$이므로

$f(2)=8+40+18=66$ 답 66

0107 (i) $x>1$일 때, $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$\dfrac{x^2-1}{x-1}\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$

$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{(x-1)(3x-1)}{x-1}$

$\therefore x+1\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le3x-1$

이때 $\lim_{x\to1+}(x+1)=2$, $\lim_{x\to1+}(3x-1)=2$이므로

$\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$\therefore 3x-1\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le x+1$

이때 $\lim_{x\to1-}(3x-1)=2$, $\lim_{x\to1-}(x+1)=2$이므로

$\lim_{x\to1-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 답 2

0108 $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\dfrac{x}{2}-h\ (0\le h<1)$로 놓으면

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}\left[\dfrac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}\left(\dfrac{x}{2}-h\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{4h}{x}\right)=2$ 답 2

0109 ① $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to0-}\dfrac{x}{[x]}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x}{-1}=0$

② $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to0+}\dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{0}{x}=0$

③ $-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$

$\therefore \lim_{x\to0-}\dfrac{[x-1]}{x-1}=\lim_{x\to0-}\dfrac{-2}{x-1}=2$

④ $0<x<1$일 때, $1<x+1<2$이므로 $[x+1]=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}\dfrac{x+1}{[x+1]}=\lim_{x\to0+}\dfrac{x+1}{1}=1$

⑤ $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to0-}\left(\dfrac{x}{[x]}\cdot\dfrac{1}{[x]}\right)=\lim_{x\to0-}\left(\dfrac{x}{-1}\cdot\dfrac{1}{-1}\right)=0$ 답 ③

0110 $\overline{OA}=\sqrt{x^2+2x}$, $\overline{OB}=x$이므로

$f(x)=\overline{OA}-\overline{OB}=\sqrt{x^2+2x}-x$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1$ 답 1

0111 $3f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면

$2g(x)=3f(x)-h(x)$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=3$ ····· ㉮

$\therefore \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+2\{3f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+3\{3f(x)-h(x)\}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{7f(x)-2h(x)}{7f(x)-3h(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{7-2\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}{7-3\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}=1$ ····· ㉯

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	$g(x)$를 $h(x)$, $f(x)$에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$의 값 구하기	60 %

0112 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2-7x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ ····· ㉮

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2-x}-3x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{9x^2-x}-3x)(\sqrt{9x^2-x}+3x)}{\sqrt{9x^2-x}+3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{9x^2-x}+3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{9-\dfrac{1}{x}}+3}=-\dfrac{1}{6}$ ····· ㉯

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$ ····· ㉰

답 $\dfrac{1}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값 구하기	40 %
㉯	$\lim_{x\to\infty}g(x)$의 값 구하기	50 %
㉰	$\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)$의 값 구하기	10 %

0113 $a\le0$이면 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}=\infty$이므로

$a>0$이어야 한다.

$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+x+1)-(ax-1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax-1)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2+(1+2a)x}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax-1)}$ ····· ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면

$1-a^2=0$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$ ····· ㉮

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+x+1}+x-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore b=\dfrac{3}{2}$ ····· ㉯

$\therefore a+b=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ ㉢

답 $\frac{5}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	50%
㉯	b의 값 구하기	40%
㉰	$a+b$의 값 구하기	10%

0114 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=-2$ ㉮

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)+2\}f(x)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+1}$$ ㉯

$$=2\cdot\frac{-2}{1+1}=-2$$ ㉰

답 -2

단계	채점요소	배점
㉮	$\lim_{x\to1}f(x)$의 값 구하기	50%
㉯	주어진 식 변형하기	40%
㉰	$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x^2-1}$의 값 구하기	10%

0115 $\frac{t-1}{t+1}=m$으로 놓으면 $t\to\infty$일 때 $m\to1-$이므로

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{m\to1-}f(m)=2$$

$\frac{4t-1}{t+1}=n$으로 놓으면 $t\to-\infty$일 때 $n\to4+$이므로

$$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{n\to4+}f(n)=3$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$$ 답 ③

0116 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-1}{3-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}f(t)-1}{3-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t}{3t-1}=2$$

이때 $f(t)-t=6t+b$ (b는 상수)로 놓을 수 있으므로

$f(t)=7t+b$ $\therefore f(x)=7x+b$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=a$에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(7x+b)=0$이므로

$14+b=0$ $\therefore b=-14$

따라서 $f(x)=7x-14$이므로

$$a=\lim_{x\to2}\frac{7x-14}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{7(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{7}{x-1}=7$$

$\therefore f(a)=f(7)=7\cdot7-14=35$ 답 35

0117 (i) $n<x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{n^2+n}{n}=n+1$$

(ii) $n-1<x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+n}{n-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}$$

극한값이 존재하므로 $n+1=\frac{n^2-n+1}{n-1}$

$n^2-1=n^2-n+1$ $\therefore n=2$

이때 $k=n+1=3$

$\therefore n+k=5$ 답 5

0118 점 P의 좌표가 (a, a)이므로 $Q(\sqrt{a}, a)$, $R(a, a^2)$

(i) $0<a<1$일 때, $\overline{PQ}=\sqrt{a}-a$, $\overline{PR}=a-a^2$

$$\therefore \lim_{a\to1-}\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\lim_{a\to1-}\frac{a-a^2}{\sqrt{a}-a}$$
$$=\lim_{a\to1-}\frac{(a-a^2)(\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-a)(\sqrt{a}+a)}$$
$$=\lim_{a\to1-}(\sqrt{a}+a)=2$$

(ii) $a>1$일 때, $\overline{PQ}=a-\sqrt{a}$, $\overline{PR}=a^2-a$

$$\therefore \lim_{a\to1+}\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\lim_{a\to1+}\frac{a^2-a}{a-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to1+}\frac{(a^2-a)(a+\sqrt{a})}{(a-\sqrt{a})(a+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{a\to1+}(a+\sqrt{a})=2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{a\to1}\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=2$ 답 2

02 함수의 연속

교과서 문제 정복하기

본문 23쪽, 25쪽

0119 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0120 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$
따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0121 $f(0)=2$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 답 풀이 참조

0122 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 정의되어 있지 않고, 극한값 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$도 존재하지 않으므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0123 $f(1)=2$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$이고 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0124 $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0125 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0126 $f(1)=1$,
$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}x=1$
이고 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0127 답 $[-2, 3]$

0128 답 $(1, 5)$

0129 답 $[-3, 4)$

0130 답 $(-7, 2]$

0131 답 $(-\infty, 4)$

0132 답 $[3, \infty)$

0133 함수 $f(x)=x^2+2x$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0134 함수 $f(x)=\sqrt{3-x}$의 정의역은 $3-x\geq0$, 즉 $x\leq3$인 x의 값들의 집합이므로 반닫힌 구간 $(-\infty, 3]$이다. 답 $(-\infty, 3]$

0135 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$의 정의역은 $x+1\neq0$, 즉 $x\neq-1$인 x의 값들의 집합이므로 열린구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$이다. 답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

0136 함수 $f(x)=x+3$은 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0137 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은 $x-1\geq0$일 때, 즉 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 연속이다. 답 $[1, \infty)$

0138 함수 $f(x)=2$는 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0139 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$은 $x\neq0$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

0140 함수 $y=x^2-2x$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0141 함수 $y=(x+1)(x^2+x-2)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0142 함수 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$는 유리함수이므로 $x\neq3$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$

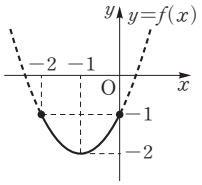
0143 함수 $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$은 유리함수이므로 $x\neq1$, $x\neq2$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$

0144 (1) $f(x)+g(x)=(x-2)+(x^2+4x-5)$
$=x^2+5x-7$
즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.
(2) $f(x)g(x)=(x-2)(x^2+4x-5)=x^3+2x^2-13x+10$
즉, 함수 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.
(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-2}{x^2+4x-5}=\dfrac{x-2}{(x+5)(x-1)}$는 유리함수이므로 $x\neq-5$, $x\neq1$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

(4) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+4x-5}{x-2}=\frac{(x+5)(x-1)}{x-2}$은 유리함수이므로 $x\neq 2$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, -5), (-5, 1), (1, \infty)$ (4) $(-\infty, 2), (2, \infty)$

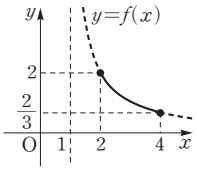
0145 함수 $f(x)=x^2+2x-1$은 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$에서 최댓값 -1, $x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 **최댓값: −1, 최솟값: −2**

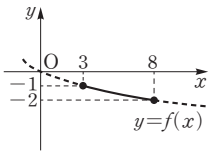
0146 함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$는 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=4$에서 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

답 **최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$**

0147 함수 $f(x)=1-\sqrt{x+1}$은 닫힌구간 $[3, 8]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 -1, $x=8$에서 최솟값 -2를 갖는다.



답 **최댓값: −1, 최솟값: −2**

0148 답 (가) 연속 (나) 사잇값

0149 답 (가) 연속 (나) 0 (다) (0, 1)

0150 $f(x)=x^3-x^2-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-2<0$, $f(2)=2>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3-x^2-2=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 **풀이 참조**

0151 $f(x)=x^4+x^3-9x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-6<0$, $f(2)=7>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^4+x^3-9x+1=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 **풀이 참조**

유형 익히기

본문 26~31쪽

0152 ㄱ. $x\neq 1$일 때, $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

이때 $f(1)=2$이고, $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{-x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(1)$, $f(-1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

이때 $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄹ이다.

답 **ㄱ, ㄹ**

0153 ①, ②, ③ $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(0)=2$이고

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+2)=\lim_{x\to 0-}(-x+2)=2$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{|5x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{5x}{x}=5$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{|5x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-5x}{x}=-5$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ④이다.

답 ④

0154 $f(a)=4a$이고

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} 4x=4a$,

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-5)=a^2-5$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하고

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이어야 하므로 ····· ㉮

$4a=a^2-5$, $a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=5$ ····· ㉯

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+5=4$ ····· ㉰

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	연속이 되도록 하는 조건 알기	40 %
㉯	a의 값 구하기	50 %
㉰	모든 실수 a의 값의 합 구하기	10 %

0155 ㄱ. $\lim_{x\to 3+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 끊어져 있으므로 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수는 3이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0156 $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=4$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않는다. $\therefore a=1$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=2$에서 끊어져 있으므로

$x=1$, $x=2$에서 불연속이다. $\therefore b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 ②

0157 ㄱ. $f(0)=-2$이고

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to -1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 끊어져 있으므로 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수는 3이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0158 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 주어진 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 합성함수 $g(f(x))$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(-1)=1$

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=g(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=1$

이때 $g(f(0))=g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} g(f(x))\neq g(f(0))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(-1)=-1$

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=g(1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=-1$

이때 $g(f(0))=g(0)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(-1)=0$

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=g(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=0$

이때 $g(f(0))=g(0)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} g(f(x))\neq g(f(0))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(f(x))$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0159 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=0\cdot 0=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=0\cdot 0=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=1\cdot 0=0$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} f(g(x))=f(0)=1$

$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=f(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(g(x))=1$

이때 $f(g(0))=f(0)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} f(g(x))=f(g(0))$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{f(x)\to 0-} g(f(x))=0$

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to 0+} g(f(x))=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=0$

이때 $g(f(0))=g(1)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0160 $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-2}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}}$

$=\dfrac{x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x-2=0$, $(x-1)^2=0$인 x의 값에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이 되도록 하는 x의 값은 1, 2의 2개이다. 답 **2**

0161 $f(g(x))=f(3x^2)$이므로

$$f(g(x))=\begin{cases}\dfrac{3x^2-1}{|3x^2-1|} & (3x^2\neq1)\\ 0 & (3x^2=1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & (3x^2-1>0)\\ 0 & (3x^2-1=0)\\ -1 & (3x^2-1<0)\end{cases}$$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $3x^2-1=0$인 x의 값에서 불연속이므로

$3x^2=1$ $\therefore x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$ 답 $-\dfrac{1}{3}$

0162 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-3}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\to1$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax-3)=0$이므로

$1+a-3=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4=b$

$\therefore a+b=2+4=6$ 답 **6**

0163 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2ax+3}$이 모든 실수 x에서 연속이려면 $x^2-2ax+3=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3<0$ $\therefore -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 **3**

0164 $f(0)=-4$이므로 $-b=-4$ $\therefore b=4$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=-2$에서도 연속이다.

$x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$a-5=1-b$ $\therefore a=2$

$x=-2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$4-b=-6+c$ $\therefore c=6$

$\therefore abc=2\cdot4\cdot6=48$ 답 **48**

0165 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-4}{x-2}=b$ …… ㉠

$x\to2$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax-4)=0$이므로

$4+2a-4=0$ $\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4=b$

$\therefore a+b=0+4=4$ 답 ④

0166 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=4$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to-1+}(x^2-2x+b)=\lim\limits_{x\to-1-}(ax+1)$

$1+2+b=-a+1$ $\therefore a+b=-2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to4+}f(x)=\lim\limits_{x\to4-}f(x)=f(4)$

$\lim\limits_{x\to4+}(ax+1)=\lim\limits_{x\to4-}(x^2-2x+b)$

$4a+1=16-8+b$ $\therefore 4a-b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=1-(-3)=4$ 답 ④

0167 $f(x)=\begin{cases}ax+2 & (|x|\geq3)\\ x^2+x-b & (|x|<3)\end{cases}$

$=\begin{cases}ax+2 & (x\geq3)\\ x^2+x-b & (-3<x<3)\\ ax+2 & (x\leq-3)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-3$, $x=3$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-3+}f(x)=\lim\limits_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\lim\limits_{x\to-3+}(x^2+x-b)=\lim\limits_{x\to-3-}(ax+2)$

$6-b=-3a+2$ $\therefore 3a-b=-4$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to3+}(ax+2)=\lim_{x\to3-}(x^2+x-b)$

$3a+2=12-b \quad \therefore 3a+b=10$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=7$

$\therefore a+b=1+7=8$ 답 8

0168 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=1$ ····· ㉠ ····· ㉮

$x\to1+$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1+}(a\sqrt{x+1}-b)=0$이므로

$a\sqrt{2}-b=0 \quad \therefore b=a\sqrt{2}$ ····· ㉯

$b=a\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1+}\frac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}=1$

따라서 $a=2\sqrt{2}$, $b=4$이므로

$ab=8\sqrt{2}$ ····· ㉰

답 $8\sqrt{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 조건 구하기	20 %
㉯	a, b의 관계식 구하기	30 %
㉰	ab의 값 구하기	50 %

0169 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2-}\frac{\sqrt{x^2+4}+bx}{x-2}=a$ ····· ㉠

$x\to2-$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2-}(\sqrt{x^2+4}+bx)=0$이므로

$2\sqrt{2}+2b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{2}$

$b=-\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to2-}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{2}x}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{2}x)}$

$=-\frac{4}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=a$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(-\sqrt{2})=1$ 답 ③

0170 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$\lim_{x\to n+}f(x)=\lim_{x\to n-}f(x)=f(n)$

$\lim_{x\to n+}f(x)=\lim_{x\to n+}([x]^2-3[x]+4)=n^2-3n+4$

$\lim_{x\to n-}f(x)=\lim_{x\to n-}([x]^2-3[x]+4)$

$=(n-1)^2-3(n-1)+4=n^2-5n+8$

$f(n)=n^2-3n+4$

이므로 $n^2-3n+4=n^2-5n+8$

$2n=4 \quad \therefore n=2$ 답 ②

0171 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1+(-a+2)\cdot(-1)=a-1$

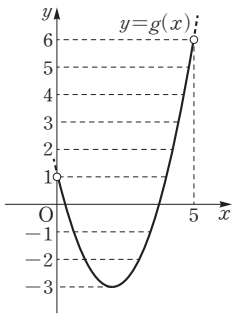
$\lim_{x\to-1-}f(x)=4+(-a+2)\cdot(-2)=2a$

$f(-1)=1+(-a+2)\cdot(-1)=a-1$

이므로 $a-1=2a \quad \therefore a=-1$ 답 -1

0172 $g(x)=x^2-4x+1$ $(0<x<5)$로 놓으면

$g(x)=(x-2)^2-3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)=-2$, -1, 0, ⋯, 5를 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이다.

이때 $g(x)=-2$, -1, 0을 만족시키는 x의 값은 각각 2개씩 존재하고 $g(x)=1$, 2, 3, 4, 5를 만족시키는 x의 값은 1개씩 존재하므로 열린구간 $(0, 5)$에서 불연속이 되는 x의 값의 개수는 11이다. 답 ④

0173 $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^2-4x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+a}{x-1}$

$x\to1$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2-4x+a)=0$이므로

$-3+a=0 \quad \therefore a=3$

$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-3)=-2$ 답 ①

0174 $x\neq2$일 때,

$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=x+4$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+4)=6$ 답 6

0175 $x\neq4$일 때, $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$$f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to4}(x+2\sqrt{x}+4)$$
$$=4+4+4=12$$

답 ③

0176 $x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx}{x-1}=2$ …… ㉠ ㉮

$x\to1$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax^2+bx)=0$이므로

$a+b=0$ $\therefore b=-a$ ㉯

$b=-a$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{ax^2-ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{ax(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}ax=a$

$\therefore a=2, b=-2$ ㉰

$\therefore ab=-4$ ㉱

답 -4

단계	채점요소	배점
㉮	$x=1$에서 연속임을 이용하기	30%
㉯	a, b의 관계식 구하기	30%
㉰	a, b의 값 구하기	30%
㉱	ab의 값 구하기	10%

0177 ① $f(x)-3g(x)=-3x^2-8x-20$이므로

함수 $f(x)-3g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

② $g(f(x))=g(x-5)=(x-5)^2+3(x-5)+5$

$=x^2-7x+15$

이므로 함수 $g(f(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-5}{x^2+3x+5}$에서

$x^2+3x+5=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$

이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+3x+5}{x-5}$는 $x=5$에서 정의되어 있지 않으므로

$x=5$에서 불연속이다.

⑤ $f(x)g(x)=(x-5)(x^2+3x+5)=x^3-2x^2-10x-25$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0178 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

① $\lim_{x\to a}\{2f(x)-g(x)\}=2f(a)-g(a)$이므로

함수 $2f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

② $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=f(a)g(a)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$

에서 연속이다.

③ [반례] $f(a)=g(a)$이면 $\dfrac{f(a)}{f(a)-g(a)}$가 $x=a$에서 정의되어

있지 않으므로 함수 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속

이다.

⑤ 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$이어야 하므로 함수 $g(x)$가

$x=f(a)$에서 연속이라는 조건이 더 필요하다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수가 아닌 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

0179 ㄱ. $h(x)=f(x)+g(x)$로 놓으면

$g(x)=h(x)-f(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(x)$도

모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ -1 & (x\leq1)\end{cases}$, $g(x)=|x|$이면

함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이지만 $f(x)$는 $x=1$에서

불연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $g(x)=-\dfrac{2}{x}$이면

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이지만

함수 $f(g(x))=\dfrac{x}{2(x-1)}$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않

으므로 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0180 ① 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$, $x=1$에서 끊어져

있으므로 불연속이 되는 x의 값은 0, 1의 2개이다.

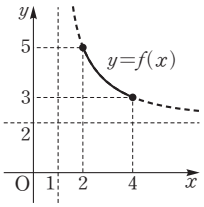
② 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

④ $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=3$이므로 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$는

존재하지 않는다.

⑤ 열린구간 $(0, 3)$에서 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

0181 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$
이므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 5, $x=4$에서 최솟값 3을 갖는다.



답 최댓값: 5, 최솟값: 3

0182 ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이므로 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
ㄴ. [반례] 두 함수 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 모두 연속이지만 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{x^2}$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.
ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x-2$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 모두 연속이지만 $f(g(x))=\dfrac{1}{x-2}$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.
따라서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는 함수는 ㄱ뿐이다.
답 ①

0183 $f(x)=2x^3-x^2-x-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
$f(-1)=-3<0$, $f(0)=-1<0$, $f(1)=-1<0$,
$f(2)=9>0$, $f(3)=41>0$, $f(4)=107>0$
따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다. 답 ③

0184 $f(-2)f(-1)<0$, $f(2)f(3)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
또, $f(1)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 3)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. 답 3개

0185 ㄱ. $f(x)=x^3+x-5$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-3<0$, $f(2)=5>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f(x)=x^3-2x-3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-4<0$, $f(2)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(x)=x^4+x^3-9x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-6<0$, $f(2)=7>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0186 $g(x)=f(x)-1$로 놓으면 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 함수 $g(x)$도 연속함수이다. ……㉮
방정식 $f(x)=1$, 즉 $g(x)=0$이 열린구간 $(1, 3)$에서 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $g(1)g(3)<0$이어야 한다. 이때
$g(1)=f(1)-1=k-1$,
$g(3)=f(3)-1=(k-5)-1=k-6$
이므로 $(k-1)(k-6)<0$ $\therefore 1<k<6$ ……㉯
따라서 정수 k는 2, 3, 4, 5의 4개이다. ……㉰
답 4

단계	채점요소	배점
㉮	$g(x)=f(x)-1$로 놓고 함수 $g(x)$가 연속함수임을 알기	20 %
㉯	사잇값의 정리를 이용하여 k의 값의 범위 구하기	60 %
㉰	정수 k의 개수 구하기	20 %

0187 속력이 연속하여 변하므로 속력이 83 km/h에서 98 km/h로 변하는 11 : 30과 12 : 00 사이에 속력이 95 km/h인 순간이 적어도 한 번 존재한다. 마찬가지로 12 : 00와 12 : 30 사이에 속력이 95 km/h인 순간이 적어도 한 번 존재한다.
따라서 k의 최솟값은 2이다. 답 ②

0188 몸무게는 연속하여 변하므로 사잇값의 정리에 의하여 ② 몸무게가 67 kg인 때가 적어도 한 번 있었다. 답 ②

유형 up
본문 32쪽

0189 함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.
$\therefore \lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-} g(f(x))=g(f(1))$
$g(f(x))=\begin{cases} g(3-x) & (x\geq 1) \\ g(x+2) & (x<1) \end{cases}$이므로
$\lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1+} g(3-x)=g(2)=4+2a$
$\lim\limits_{x\to 1-} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-} g(x+2)=g(3)=9+3a$
즉, $4+2a=9+3a$ $\therefore a=-5$ 답 ①

0190 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}\{(x^2+1)+(x+k)\}=3+k$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}\{(x-1)+(x^2+2)\}=3$

이므로 $3+k=3$ $\therefore k=0$

$\therefore g(5)=5+0=5$ 답 **5**

0191 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=3$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$

즉, $\lim_{x\to3+}(3x-6)=\lim_{x\to3-}(x^2+ax+b)$이므로

$3=9+3a+b$ $\therefore 3a+b=-6$ …… ㉠

이때 $f(x)=f(x+5)$이므로 $f(0)=f(5)$

$\therefore b=15-6=9$

$b=9$를 ㉠에 대입하면 $3a+9=-6$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3x-6 & (3\le x\le5)\\ x^2-5x+9 & (0\le x<3)\end{cases}$이므로

$f(16)=f(11)=f(6)=f(1)=1-5+9=5$ 답 **5**

0192 ㈎에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=0$ $\therefore f(-1)=0$

㈏에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=0$ $\therefore f(2)=0$

이때 $f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수)로 놓으면 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\{(x-2)g(x)\}=-3g(-1)=a$

$\therefore g(-1)=-\frac{a}{3}$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\{(x+1)g(x)\}=3g(2)=b$

$\therefore g(2)=\frac{b}{3}$

$\therefore g(-1)g(2)=\left(-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{b}{3}=-\frac{ab}{9}<0$ ($\because ab>0$)

이때 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, 2를 갖고, 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 최소 3개의 실근을 갖는다. 답 ③

0193 ㈎에서 $x=1$일 때, $f(3)=f(5)$이고

$x=4$일 때, $f(0)=f(8)$

이때 ㈏에서 $f(0)$과 $f(3)$의 부호가 서로 다르고 ㈐에서 $f(4)$와 $f(5)$의 부호가 서로 다르므로 $f(0)$, $f(4)$, $f(8)$의 부호는 서로 같고 이는 $f(3)$, $f(5)$의 부호와 다르다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하는 구간은 열린구간 $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 8)$이므로 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$\therefore k=4$ 답 **4**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 33~35쪽

0194 답 ④

0195 ① $f(x)=\sqrt{x+1}$은 정의역 $[-1, \infty)$에서 연속이다.

② $f(x)=2x^2-4x+3$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $f(x)=\frac{x+3}{x^2-x-2}=\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$은 $x=-1$, $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=-1$, $x=2$에서 불연속이다.

④ $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

이때 $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x^3}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to0+}x^2=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x^3}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x^3}{-x}=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\therefore \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}x=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\ne\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ②, ④이다. 답 ②, ④

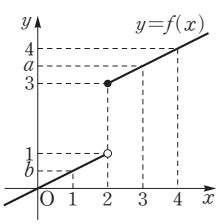
0196 $f(3)=a$, $f(1)=b$라 하자.

ㄱ. $f(f(2))=f(3)=a$

따라서 $f(f(2))$의 값은 존재한다.

ㄴ. $x\to2+$일 때 $f(x)\to3+$이고, $x\to2-$일 때 $f(x)\to1-$이므로 $f(x)=t$라 하면

$\lim_{x\to2+}f(f(x))=\lim_{t\to3+}f(t)=a$



$\lim_{x\to 2-} f(f(x)) = \lim_{t\to 1-} f(t) = b$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(f(x)) \neq \lim_{x\to 2-} f(f(x))$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 2} f(f(x))$는 존재하지 않는다.

ㄷ. ㄴ에 의하여 함수 $f(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

참고 합성함수 $g(f(x))$의 극한값을 구할 때는 좌극한과 우극한에 주의하면서 $f(x)=t$로 치환하여 생각한다.

예 $x \to a+$일 때, $f(x) \to b+$이면 $t \to b+$이므로

$\lim_{x\to a+} g(f(x)) = \lim_{t\to b+} g(t) = \lim_{x\to b+} g(x)$

0197 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다. 즉,

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4) = 12$$

$\therefore a=12$ 답 **12**

0198 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ $\therefore \lim_{x\to -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = 2$ …… ㉠

$x \to -1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1} (x^2+ax+b) = 0$이므로

$1-a+b=0$ $\therefore b=a-1$

$b=a-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+ax+a-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1} (x+a-1)$$
$$= -2+a = 2$$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=7$ 답 **7**

0199 열린구간 $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$에서 함수 $f(x)=\frac{4}{3}[3x]$는 $x=-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값의 개수는 6이다. 답 ④

0200 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

열린구간 $(-1, 1)$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다. 즉,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$$
$$= -1$$

답 ②

0201 함수 $f(x)=\frac{5}{x+2}$는 $x\neq -2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

① $-5\le x<-2$일 때, 최솟값은 없다.

②, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ $-2<x\le 3$일 때, 최솟값은 $f(3)=\frac{5}{3+2}=1$

따라서 최솟값이 존재하지 않는 구간은 ①이다. 답 ①

0202 $f(x)=x^3+x^2-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(-1)=-1+1-1=-1<0$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=-\frac{7}{8}<0$

$f(0)=0+0-1=-1<0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{8}<0$

$f(1)=1+1-1=1>0$

$f(2)=8+4-1=11>0$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이다. 답 ④

0203 버스가 A 정류장을 출발한 지 x시간 후의 버스의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A 정류장을 출발한 지 각각 b시간, c시간 후에 B 정류장, C 정류장에 도착하였다고 하면

$f(0)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$

이때 $0<\alpha<b$, $b<\beta<c$이고 $f(\alpha)=58$, $f(\beta)=68$인 α, β가 존재하므로 $f(k)=30$인 k가 구간 $(0, \alpha)$, (α, b), (b, β), (β, c)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 버스의 속력이 30 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$\therefore n=4$ 답 ④

0204 이차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이며, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 $x=2$에서만 불연속이다. 이때 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}$이므로

$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}$

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}$가 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

$\therefore g(2)=0$

이차함수 $g(x)$를 $g(x)=(x-2)(x+a)$(a는 상수)로 놓으면

$\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{g(2)}{1}=0$, $\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}=\frac{g(2)}{1}=0$

에서 $\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}=0$이므로

$\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to2+}(x+a)=2+a=0$

$\therefore a=-2$

따라서 $g(x)=(x-2)^2$이므로

$g(5)=3^2=9$ 답 ③

0205 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

(i) $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}(x^2-b)=\lim_{x\to-1-}(-2x+a)=1-b$

$1-b=2+a$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

(ii) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}(3x+c)=\lim_{x\to1-}(x^2-b)=3+c$

$3+c=1-b$ $\therefore b+c=-2$ …… ㉡

…… ㉮

또, $f(0)=-1$이므로 $0-b=-1$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=-2$, $c=-3$

…… ㉯

$\therefore abc=(-2)\cdot1\cdot(-3)=6$

…… ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	조건을 이용하여 a, b, c에 대한 식 세우기	50%
㉯	a, b, c의 값 구하기	30%
㉰	abc의 값 구하기	20%

0206 $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{ax^2+bx}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=4$ …… ㉠

…… ㉮

$x\to2$일 때, (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to2}(ax^2+bx)=0$이므로

$4a+2b=0$ $\therefore b=-2a$

…… ㉯

$b=-2a$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}ax=2a=4$

$\therefore a=2$, $b=-4$

…… ㉰

$\therefore a+b=-2$

…… ㉱

답 -2

단계	채점요소	배점
㉮	$x=2$에서 연속임을 이용하기	30%
㉯	a, b의 관계식 구하기	30%
㉰	a, b의 값 구하기	30%
㉱	$a+b$의 값 구하기	10%

0207 $g(x)=f(x)+3x$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

$g(1)=f(1)+3=-5+3=-2$

$g(2)=f(2)+6=-2+6=4$

$g(3)=f(3)+9=3+9=12$

$g(4)=f(4)+12=-14+12=-2$

…… ㉮

따라서 $g(1)g(2)<0$, $g(3)g(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

…… ㉯

즉, 방정식 $f(x)+3x=0$은 열린구간 $(1, 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

…… ㉰

답 2개

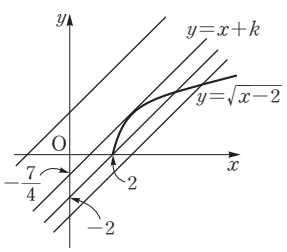
단계	채점요소	배점
㉮	$g(x)=f(x)+3x$로 놓고 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$의 값 구하기	60%
㉯	$g(a)g(b)<0$인 열린구간 (a, b) 구하기	30%
㉰	실근의 최소 개수 구하기	10%

0208 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 접할 때의 실수 k의 값은

$\sqrt{x-2}=x+k$에서

$x-2=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$



이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)$

$=(4k^2-4k+1)-(4k^2+8)$

$=-4k-7=0$

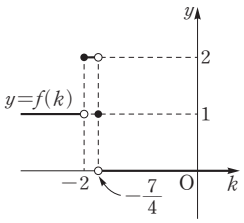
$\therefore k=-\frac{7}{4}$

또, 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은 직선 $y=x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때이므로 $k=-2$

$$\therefore f(k)=\begin{cases}0 & \left(k>-\frac{7}{4}\right)\\ 1 & \left(k=-\frac{7}{4}\right)\\ 2 & \left(-2\le k<-\frac{7}{4}\right)\\ 1 & (k<-2)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(k)$가 불연속이 되도록 하는 k의 값은

-2, $-\frac{7}{4}$의 2개이다.



답 **2**

0209 원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

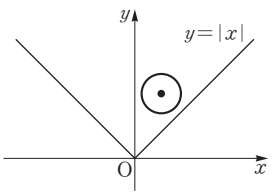
원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

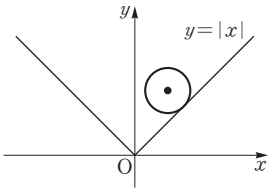
원의 중심 $(1, 2)$와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

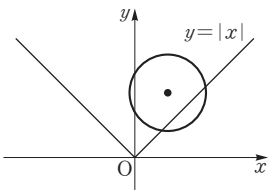
(i) $0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(r)=0$



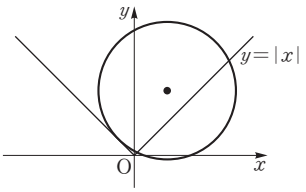
(ii) $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(r)=1$



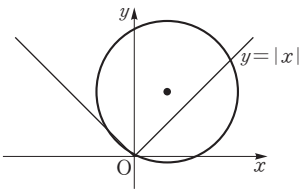
(iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<r<\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(r)=2$



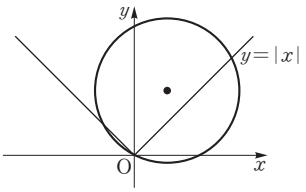
(iv) $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(r)=3$



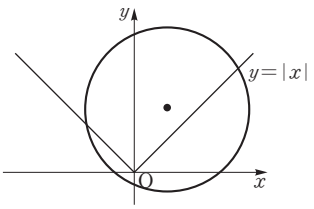
(v) $\frac{3\sqrt{2}}{2}<r<\sqrt{5}$일 때, $f(r)=4$



(vi) $r=\sqrt{5}$일 때, $f(r)=3$

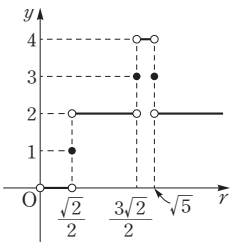


(vii) $r>\sqrt{5}$일 때, $f(r)=2$



(i)~(vii)에 의하여 함수 $y=f(r)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(r)$는 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{5}$에서 불연속이므로 불연속이 되는 r의 값의 개수는 3이다.

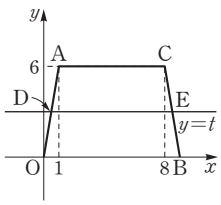


답 ③

0210 $\square AOBC=\frac{1}{2}\cdot(9+7)\cdot 6=48$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=t$와 $\square AOBC$가 만나는 점을 D, E라 하고 $\square DOBE$의 넓이를 $f(t)$라 하자.

이때 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 $f(0)=0$, $f(6)=48$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=\frac{48}{2}$인 c가 열린구간 $(0, 6)$에 존재한다.



따라서 $\square AOBC$의 넓이를 이등분하고 x축에 평행한 직선 $y=c$가 존재한다.

답 **풀이 참조**

03 미분계수와 도함수

교과서 문제 정/복/하/기

본문 39쪽, 41쪽

0211 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{7-1}{2}=3$ 답 3

0212 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4-0}{2}=2$ 답 2

0213 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{20-(-4)}{2}=12$ 답 12

0214 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1-9}{2}=-4$ 답 -4

0215 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{-14-1}{3}=-5$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3}=\frac{\{-(3+\Delta x)^2+2\}-(-7)}{\Delta x}$

$=\frac{-6\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=-6-\Delta x$

답 (1) -5 (2) $-6-\Delta x$

0216 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$

$=\frac{\{2(a+\Delta x)+3\}-(2a+3)}{\Delta x}$

$=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$

$=\frac{\{(a+\Delta x)^2-(a+\Delta x)\}-(a^2-a)}{\Delta x}$

$=\frac{(2a-1)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a-1+\Delta x$

답 (1) 2 (2) $2a-1+\Delta x$

0217 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(2+\Delta x)-6}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 3

0218 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(2+\Delta x)+5\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$ 답 -2

0219 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^2-2\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$ 답 4

0220 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x+3)^2-25}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(10+\Delta x)=10$ 답 10

0221 $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-2(a+\Delta x)\}-(a^2-2a)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2a-2)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2a-2+\Delta x)=2a-2$

즉, $2a-2=6$이므로 $a=4$ 답 4

0222 $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(a+\Delta x)^3+3\}-(2a^3+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6a^2\Delta x+6a(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{6a^2+6a\Delta x+2(\Delta x)^2\}=6a^2$

즉, $6a^2=6$이므로 $a=1$ ($\because a>0$) 답 1

0223 $f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(-1+\Delta x)^2+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-6+3\Delta x)=-6$ 답 -6

0224 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(0+\Delta x)^2-2(0+\Delta x)-5\}-(-5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2+\Delta x)=-2$ 답 -2

0225 $f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-(-1+\Delta x)^3-(-1+\Delta x)+7\}-9}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-4\Delta x+3(\Delta x)^2-(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{-4+3\Delta x-(\Delta x)^2\}=-4$ 답 -4

0226 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-2)=0$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(-x+2)=0$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다. 답 연속이다.

0227 $\lim_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\dfrac{(x-2)-0}{x-2}=1$

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\dfrac{(-x+2)-0}{x-2}=-1$

이므로 $f'(2)$가 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다. 답 미분가능하지 않다.

0228 $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} 2x^3=2$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(6x-4)=2$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속이다.

0229 $\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{2x^3-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} 2(x^2+x+1)=6$

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\dfrac{(6x-4)-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\dfrac{6(x-1)}{x-1}=6$

이므로 $f'(1)$이 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. 답 미분가능하다.

0230 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2-2}{h}=0$ 답 $f'(x)=0$

0231 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{2(x+h)+1\}-(2x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}=2$ 답 $f'(x)=2$

0232 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-1\}-(x^2-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$ 답 $f'(x)=2x$

0233 ㄱ. $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$

ㄷ. $t-x=h$로 놓으면 $t=x+h$

$t\to x$일 때 $h\to 0$이므로

$\lim_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

ㄹ. $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\Delta x)}{\Delta x}\neq\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

따라서 서로 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0234 $y'=(x^3)'=3x^2$ 답 $y'=3x^2$

0235 $y'=(-x^5)'=-5x^4$ 답 $y'=-5x^4$

0236 $y'=(-8)'=0$ 답 $y'=0$

0237 $y'=\left(\dfrac{1}{2}x^4+x^2\right)'=\left(\dfrac{1}{2}x^4\right)'+(x^2)'$

$=2x^3+2x$ 답 $y'=2x^3+2x$

0238 $y'=(-3x^2+9x+10)'=(-3x^2)'+(9x)'+(10)'$

$=-6x+9$ 답 $y'=-6x+9$

0239 (1) 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)+g'(1)=3+(-2)=1$

(2) 함수 $2f(x)-g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$2f'(1)-g'(1)=2\cdot 3-(-2)=8$

답 (1) 1 (2) 8

0240 $y'=x'(3x+2)+x(3x+2)'$

$=(3x+2)+3x=6x+2$ 답 $y'=6x+2$

0241 $y'=(x-4)'(3x-1)+(x-4)(3x-1)'$

$=(3x-1)+3(x-4)$

$=6x-13$ 답 $y'=6x-13$

0242 $y'=(-x^2)'(2x-3)+(-x^2)(2x-3)'$
$=-2x(2x-3)-2x^2$
$=-6x^2+6x$ 답 $y'=-6x^2+6x$

0243 $y'=(x^2-3)'(x+4)+(x^2-3)(x+4)'$
$=2x(x+4)+(x^2-3)$
$=3x^2+8x-3$ 답 $y'=3x^2+8x-3$

0244 $y'=x'(x-1)(x-2)+x(x-1)'(x-2)$
$+x(x-1)(x-2)'$
$=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$
$=3x^2-6x+2$ 답 $y'=3x^2-6x+2$

0245 $y'=(x-5)'(2x+4)(-x+1)$
$+(x-5)(2x+4)'(-x+1)$
$+(x-5)(2x+4)(-x+1)'$
$=(2x+4)(-x+1)+2(x-5)(-x+1)$
$-(x-5)(2x+4)$
$=-6x^2+16x+14$ 답 $y'=-6x^2+16x+14$

0246 $y=(3x+2)^2=(3x+2)(3x+2)$이므로
$y'=(3x+2)'(3x+2)+(3x+2)(3x+2)'$
$=2(3x+2)(3x+2)'$
$=6(3x+2)$ 답 $y'=6(3x+2)$
다른풀이 $y'=\{(3x+2)^2\}'=2(3x+2)(3x+2)'$
$=6(3x+2)$

0247 $y=(2x-1)^3=(2x-1)(2x-1)(2x-1)$이므로
$y'=(2x-1)'(2x-1)(2x-1)+(2x-1)(2x-1)'(2x-1)$
$+(2x-1)(2x-1)(2x-1)'$
$=3(2x-1)^2(2x-1)'$
$=6(2x-1)^2$ 답 $y'=6(2x-1)^2$

0248 $y=(x^2+1)(2x+1)^2$
$=(x^2+1)(2x+1)(2x+1)$
이므로
$y'=(x^2+1)'(2x+1)(2x+1)+(x^2+1)(2x+1)'(2x+1)$
$+(x^2+1)(2x+1)(2x+1)'$
$=2x(2x+1)^2+2(x^2+1)(2x+1)(2x+1)'$
$=2x(2x+1)^2+4(x^2+1)(2x+1)$
$=2(2x+1)(4x^2+x+2)$
답 $y'=2(2x+1)(4x^2+x+2)$

유형 익히기 본문 42~49쪽

0249 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^3-2a+5-(1-2+5)}{a-1}=\frac{a^3-2a+1}{a-1}$
$=\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=a^2+a-1$
즉, $a^2+a-1=5$이므로
$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>1$) 답 2

0250 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$
즉, $h+2=3$이므로 $h=1$ 답 1

0251 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^2-3a+a-(1-3+a)}{a-1}=\frac{a^2-3a+2}{a-1}$
$=\frac{(a-1)(a-2)}{a-1}=a-2$
즉, $a-2=2a-7$이므로 $a=5$ 답 5

0252 직선 AB의 기울기는 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율과 같으므로
$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=2$
그런데 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(0)=f(4)$
따라서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-f(4)}{2}=-\frac{f(4)-f(2)}{2}=-2$ 답 −2

0253 x의 값이 −1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{8-3}{5}=1$
함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2-2(a+h)\}-(a^2-2a)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2-2h}{h}$
$=\lim_{h\to0}(2a+h-2)=2a-2$

즉, $2a-2=1$이므로 $a=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0254 x의 값이 1에서 k까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=\frac{(k^3-1)-0}{k-1}$$
$$=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{k-1}=k^2+k+1$$

함수 $f(x)$의 $x=\sqrt{7}$에서의 미분계수는

$$f'(\sqrt{7})=\lim_{h\to0}\frac{f(\sqrt{7}+h)-f(\sqrt{7})}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(\sqrt{7}+h)^3-1\}-\{(\sqrt{7})^3-1\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{21h+3\sqrt{7}h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(21+3\sqrt{7}h+h^2)=21$$

즉, $k^2+k+1=21$이므로

$k^2+k-20=0$, $(k+5)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>1$) 답 **4**

0255 x의 값이 a에서 $2a$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=\frac{(4a^3+4a)-(a^3+2a)}{a}=\frac{3a^3+2a}{a}$$
$$=3a^2+2$$

..... ㉮

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{a(1+h)^2+2(1+h)\}-(a+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+ah^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2a+ah+2)=2a+2$$

..... ㉯

즉, $3a^2+2=2a+2$이므로

$3a^2-2a=0$, $a(3a-2)=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}$ ($\because a>0$)

..... ㉰

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	x의 값이 a에서 $2a$까지 변할 때의 평균변화율 구하기	30 %
㉯	$x=1$에서의 미분계수 구하기	40 %
㉰	a의 값 구하기	30 %

0256 $\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=-k$, $f(1)=3$이므로

$f(k)=-k^2+k+3$

따라서 $f(x)=-x^2+x+3$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(1+h)^2+(1+h)+3\}-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h-h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-1-h)=-1$$ 답 **−1**

0257 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{3h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\frac{1}{3}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}f'(2)+\frac{1}{3}f'(2)=\frac{2}{3}f'(2)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot6=4$$ 답 **4**

0258 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k$

$$=kf'(1)=3k$$

즉, $3k=6$이므로 $k=2$ 답 **2**

0259 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+2h)-f(a)\}-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\cdot(-3)$$
$$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)$$ 답 ⑤

0260 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a+h^2)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+3h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot3-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h\right\}$$
$$=3f'(a)+0\cdot f'(a)=3f'(a)$$
$$=3\cdot(-3)=-9$$ 답 **−9**

0261 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\right\}$$
$$=3f'(1)=3\cdot2=6$$ 답 ③

0262 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$이므로 $f'(3)=1$

$\therefore \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+3h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\cdot3$

$=3f'(3)=3\cdot1=3$ 답 **3**

0263 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\{x^2f(1)-f(1)\}-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\cdot f(1)-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+1)\cdot f(1)-\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$

$=2f(1)-2f'(1)$

$=2\cdot3-2\cdot1=4$ 답 **4**

0264 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-3}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$

$=f'(1)\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{f(1)}}=6\cdot\dfrac{1}{3}=2$ 답 **2**

0265 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\therefore f(0)=1$

$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2)+f(h)-1-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$

이때 $f'(2)=1$이므로 $f'(0)=1$

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)-1-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=1$ 답 ①

0266 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=3$ 답 **3**

0267 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

$f'(2a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2a+h)-f(2a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2a)+f(h)-2ah-f(2a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-2ah}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}-2a$

$=f'(0)-2a=3-2a$

즉, $3-2a=7$이므로 $a=-2$ 답 **−2**

0268 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$ $\therefore f(0)=\dfrac{1}{2}$ ($\because f(0)>0$)

$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

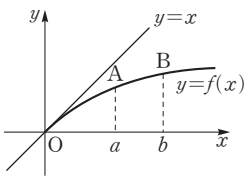
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2f(2)f(h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2f(2)\left\{f(h)-\dfrac{1}{2}\right\}}{h}$

$=2f(2)\cdot\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=2f(2)f'(0)$

$=2f(2)\cdot3=6f(2)$

$\therefore \dfrac{f'(2)}{f(2)}=\dfrac{6f(2)}{f(2)}=6$ 답 ④

0269 오른쪽 그림과 같이 A$(a,\ f(a))$, B$(b,\ f(b))$라 하자.



ㄱ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)>f'(b)$

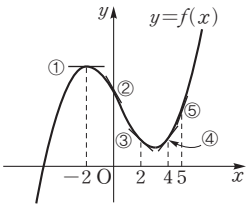
ㄴ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때 $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$

ㄷ. $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$

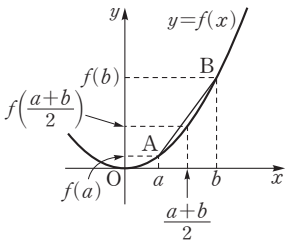
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0270 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 ①~⑤의 값은 각각 오른쪽 그림의 접선의 기울기와 같다. 따라서 가장 큰 값은 ⑤이다.



답 ⑤

0271 ㄱ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)<f'(b)$



ㄴ. 직선 AB의 기울기가 점 B에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$

ㄷ. $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0272 ㄱ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x^2-x|}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1+}x=1$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|x^2-x|}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$$

이므로 $f'(1)$이 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0273 $f(x)=(x+2)|x-1|$에서

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+2)(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+2)(-x+1)=0$$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ㉮

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+2)=3$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+2)(-x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}(-x-2)=-3$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. ㉯

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. ㉰

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

단계	채점요소	배점
㉮	연속성 조사하기	40 %
㉯	미분가능성 조사하기	50 %
㉰	답 구하기	10 %

0274 ① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=5$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5-5}{x}=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to0}|x|=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}x=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 답 ③

0275 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{-x}{x}=-1$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=2$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{(x^2-3x+2)-2}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2-3x}{x}=\lim_{x\to0+}(x-3)=-3$

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\dfrac{(x^2+3x+2)-2}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to0-}(x+3)=3$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0+}(x+2)=2$

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\dfrac{(2x+1)-1}{x}=\lim_{x\to0-}\dfrac{2x}{x}=2$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0276 함수 $y=f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 불연속이므로 $m=2$

또, $x=-2$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$

$\therefore m+n=5$ 답 **5**

0277 ① 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(3)<0$

② $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다.

③ $f'(x)=0$인 x의 값은 존재하지 않는다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다. 답 ⑤

0278 $\{f(x)\}^2=g(x)$로 놓으면 $y=g(x)$에서

$y'=\lim_{h\to0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(x+h)\}^2-\{f(x)\}^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(x+h)+f(x)\}\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\{\boxed{f(x+h)+f(x)}\}\cdot\lim_{h\to0}\dfrac{\boxed{f(x+h)-f(x)}}{h}$

$=\boxed{2f(x)f'(x)}$

답 (가) $f(x+h)+f(x)$ (나) $f(x+h)-f(x)$ (다) $2f(x)f'(x)$

0279 $x^2f(x)=g(x)$로 놓으면 $y=g(x)$에서

$y'=\lim_{h\to0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2f(x+h)-x^2f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2\{\boxed{f(x+h)-f(x)}\}+f(x)\{(x+h)^2-x^2\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}(x+h)^2\cdot\lim_{h\to0}\dfrac{\boxed{f(x+h)-f(x)}}{h}$

$+f(x)\cdot\lim_{h\to0}(\boxed{2x}+h)$

$=\boxed{x^2f'(x)+2xf(x)}$

답 (가) $f(x+h)-f(x)$ (나) $2x$ (다) $x^2f'(x)+2xf(x)$

0280 $f'(x)=-x^2+x+1$이므로

$f'(2)=-4+2+1=-1$ 답 ①

0281 $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$f'(1)=2$에서 $3-6+a=2$ $\therefore a=5$ 답 ⑤

0282 $f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{99}$이므로

$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{100개}=1\cdot100=100$ 답 **100**

0283 $f(1)=1$에서 $a+b+3=1$ $\therefore a+b=-2$ … ㉠

$f'(x)=3ax^2+b$이므로

$f'(1)=4$에서 $3a+b=4$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

$\therefore ab=-15$ 답 **−15**

0284 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$에서

$f'(x)=(x+1)'(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)'(x+3)$

$+(x+1)(x+2)(x+3)'$

$=(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)$

$\therefore f'(0)=6+3+2=11$ 답 ①

0285 $f(x)=(3x^2-1)^3=(3x^2-1)(3x^2-1)(3x^2-1)$

이므로

$f'(x)=(3x^2-1)'(3x^2-1)(3x^2-1)$

$+(3x^2-1)(3x^2-1)'(3x^2-1)$

$+(3x^2-1)(3x^2-1)(3x^2-1)'$

$=3(3x^2-1)^2(3x^2-1)'=18x(3x^2-1)^2$

$\therefore f'(1)=18\cdot4=72$ 답 **72**

0286 $g'(x)=(x^2+3x)'f(x)+(x^2+3x)f'(x)$

$=(2x+3)f(x)+(x^2+3x)f'(x)$

$\therefore g'(1)=5f(1)+4f'(1)=5\cdot3+4\cdot2=23$ 답 **23**

0287 $f'(x)=(x-a)'(x^3+2x^2+8)$
$+(x-a)(x^3+2x^2+8)'$
$=(x^3+2x^2+8)+(x-a)(3x^2+4x)$
$=4x^3+(6-3a)x^2-4ax+8$

…… ㉮

$f'(a)=11$에서 $a^3+2a^2+8=11$
$a^3+2a^2-3=0$, $(a-1)(a^2+3a+3)=0$
$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

…… ㉯

따라서 $f'(x)=4x^3+3x^2-4x+8$이므로
$f'(-1)=-4+3+4+8=11$

…… ㉰

답 **11**

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)$ 구하기	40 %
㉯	a의 값 구하기	30 %
㉰	$f'(-1)$의 값 구하기	30 %

0288 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$
$f'(x)=3x^2-4x$이므로
$f'(1)=3-4=-1$
$\therefore$ (주어진 식)$=2f'(1)=2\cdot(-1)=-2$ 답 ①

0289 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\{f(x)+f(1)\}\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+f(1)\}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=2f(1)f'(1)$
$f(x)=x^3-5x^2$에서 $f(1)=1-5=-4$
$f'(x)=3x^2-10x$이므로 $f'(1)=3-10=-7$
$\therefore$ (주어진 식)$=2f(1)f'(1)$
$=2\cdot(-4)\cdot(-7)=56$ 답 **56**

0290 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\{2f(x)-2f(2)\}-\{xf(2)-2f(2)\}}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot2-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)f(2)}{x-2}$
$=2f'(2)-f(2)$
$f(x)=(3x-2)^3$에서 $f(2)=4^3=64$
$f'(x)=3(3x-2)^2\cdot3=9(3x-2)^2$이므로
$f'(2)=9\cdot4^2=144$
$\therefore$ (주어진 식)$=2f'(2)-f(2)$
$=2\cdot144-64=224$ 답 **224**

0291 $f(1)=3$, $g(1)=3$이므로
$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-3+3-g(1-h)}{3h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot\dfrac{2}{3}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)$
$=\dfrac{2}{3}f'(1)+\dfrac{1}{3}g'(1)$
$f'(x)=1+3x^2+5x^4$이므로 $f'(1)=9$
$g'(x)=2x+4x^3+6x^5$이므로 $g'(1)=12$
$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{2}{3}f'(1)+\dfrac{1}{3}g'(1)$
$=\dfrac{2}{3}\cdot9+\dfrac{1}{3}\cdot12=10$ 답 ⑤

0292 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$에서 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$
$\therefore\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$
한편, $f(x)=x^3+2ax^2+bx-2b$에서
$f(1)=1+2a+b-2b=0$ $\therefore 2a-b=-1$ …… ㉠
$f'(x)=3x^2+4ax+b$이므로
$f'(1)=3+4a+b=2$ $\therefore 4a+b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$
$\therefore a+b=0$ 답 ③

0293 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right\}$
$=\dfrac{1}{2}f'(1)$
즉, $\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{5}{2}$이므로 $f'(1)=5$
한편, $f(x)=x^3+ax^2+b$, $f'(x)=3x^2+2ax$이므로
$f(-1)=-1+a+b=3$ …… ㉠
$f'(1)=3+2a=5$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$
$\therefore ab=3$ 답 ⑤

0294 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x(x-1)$을 인수로 가지므로 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$로 놓으면 …… ㉮

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)=-b$$

즉, $-b=-1$이므로 $b=1$ …… ㉯

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(ax+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x(ax+1)=a+1$$

즉, $a+1=4$이므로 $a=3$ …… ㉰

따라서 $f(x)=x(x-1)(3x+1)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 세 근의 합은

$0+1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ …… ㉱

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$f(x)=x(x-1)(ax+b)$로 놓기	40%
㉯	b의 값 구하기	20%
㉰	a의 값 구하기	20%
㉱	방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합 구하기	20%

0295 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1-2h)-f(1)\}-\{f(1+2h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2$$
$$=-2f'(1)-2f'(1)=-4f'(1)$$

즉, $-4f'(1)=8$이므로 $f'(1)=-2$

한편, $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=4x^3+2ax+b$이므로

$f'(2)=32+4a+b=-2$ $\therefore 4a+b=-34$ …… ㉠

$f'(1)=4+2a+b=-2$ $\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-14$, $b=22$

따라서 $f(x)=x^4-14x^2+22x+1$이므로

$f(1)=1-14+22+1=10$ 답 **10**

0296 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 −3이므로

$f'(1)=3+a=-3$ $\therefore a=-6$

또, 점 (1, 1)은 곡선 $y=x^3-6x+b$ 위의 점이므로

$1=1-6+b$ $\therefore b=6$

$\therefore ab=-6\cdot 6=-36$ 답 ①

0297 $f(x)=x^2-3x+2$에서 $f'(x)=2x-3$

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 9이므로

$f'(a)=2a-3=9$ $\therefore a=6$

또, 점 $(6, b)$는 함수 $f(x)=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=f(6)=36-18+2=20$ 답 $a=6, b=20$

0298 점 (1, 3)은 함수 $f(x)=x^2+ax+1$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=1+a+1=3$ $\therefore a=1$

즉, $f(x)=x^2+x+1$에서 $f'(x)=2x+1$

점 (1, 3)에서의 접선의 기울기가 m이므로

$m=f'(1)=2+1=3$

$\therefore a+m=1+3=4$ 답 ①

0299 $f(x)=(2x-1)^3(x^2+k)$로 놓으면

$$f'(x)=\{(2x-1)^3\}'(x^2+k)+(2x-1)^3(x^2+k)'$$
$$=3(2x-1)^2(2x-1)'(x^2+k)+(2x-1)^3\cdot 2x$$
$$=6(2x-1)^2(x^2+k)+2x(2x-1)^3$$
$$=2(2x-1)^2(5x^2-x+3k)$$

x좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기가 −16이므로

$f'(1)=2(4+3k)=-16$

$4+3k=-8$ $\therefore k=-4$ 답 ④

0300 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$이므로

$-1+1-b=a+3$ $\therefore a+b=-3$ …… ㉠

또, $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{(ax^2+3)-(a+3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{a(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}a(x-1)=-2a$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{(x^3+x^2+bx)-(-1+1-b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{(x+1)(x^2+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}(x^2+b)=1+b$$
즉, $-2a=1+b$ $\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$
$\therefore a-b=2-(-5)=7$ 답 **7**

다른풀이 $g(x)=ax^2+3$, $h(x)=x^3+x^2+bx$로 놓으면
$g'(x)=2ax$, $h'(x)=3x^2+2x+b$
$x=1$에서 연속이므로 $g(-1)=h(-1)$
$a+3=-1+1-b$ $\therefore a+b=-3$
$x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(-1)=h'(-1)$
$-2a=3-2+b$ $\therefore 2a+b=-1$
따라서 $a=2$, $b=-5$이므로
$a-b=7$

0301 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로
$a+b=1$ …… ㉠
또, $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$
$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$
$\therefore ab=2\cdot(-1)=-2$ 답 **−2**

0302 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로
$-b+3+1=1+a-2$ $\therefore a+b=5$ …… ㉠
또, $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2+ax-2)-(1+a-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+1+a)=2+a$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(-bx^2+3x+1)-(-b+3+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(-bx-b+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-bx-b+3)=-2b+3$$
즉, $2+a=-2b+3$ $\therefore a+2b=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-4$
$\therefore a-b=9-(-4)=13$ 답 **13**

0303 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로
$a^3=a^2+a+b$ …… ㉠
또, $f'(a)$가 존재하므로
$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x^2+x+b)-(a^2+a+b)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}(x+a+1)=2a+1$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{x^3-a^3}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}(x^2+ax+a^2)=3a^2$$
즉, $2a+1=3a^2$, $3a^2-2a-1=0$
$(3a+1)(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$1=1+1+b$ $\therefore b=-1$
$\therefore a+b=1-1=0$ 답 ②

0304 다항식 x^3+ax^2+bx-5를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^3+ax^2+bx-5=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1+a-b-5=0$ $\therefore a-b=6$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2+2ax+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$
위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$3-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=3$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$
$\therefore a+b=-3-9=-12$ 답 **−12**

다른풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$로 놓으면
$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$
$f(-1)=0$에서 $-1+a-b-5=0$ $\therefore a-b=6$
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(-1)=0$에서
$3-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=3$

0305 다항식 x^6-3x^2+a를 $(x-b)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^6-3x^2+a=(x-b)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^6-3b^2+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5-6x=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=b$를 대입하면

$6b^5-6b=0$, $6b(b^2+1)(b+1)(b-1)=0$

$\therefore b=1$ ($\because b>0$)

$b=1$을 ㉡에 대입하면 $1-3+a=0$ $\therefore a=2$

$\therefore a-b=2-1=1$ 답 **1**

0306 다항식 $x^{10}-2x^3+1$을 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-2x^3+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b=4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-6x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-16$

$a=-16$을 ㉡에 대입하면 $b=-12$

따라서 $R(x)=-16x-12$이므로

$R(1)=-28$ 답 ②

0307 다항식 $x^{10}+ax^3+b$를 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x-9$이므로

$x^{10}+ax^3+b=(x-1)^2Q(x)+4x-9$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=4-9$ $\therefore a+b=-6$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+3ax^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+4$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$10+3a=4$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

$\therefore ab=-2\cdot(-4)=8$ 답 **8**

유형 up

본문 50쪽

0308 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-kx+2}{x-1}=15$에서 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(x^n-kx+2)=0$이므로

$1-k+2=0$ $\therefore k=3$

$f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=15$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로 $f'(1)=n-3$

즉, $n-3=15$에서 $n=18$

$\therefore n+k=18+3=21$ 답 ④

0309 $f(x)=x^n-2x^2-3x$로 놓으면 $f(1)=-4$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-2x^2-3x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-4x-3$이므로 $f'(1)=n-7$

즉, $n-7=5$에서 $n=12$ 답 **12**

0310 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^n+x-34}{x-2}=k$에서 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}(x^n+x-34)=0$이므로

$2^n+2-34=0$, $2^n=32=2^5$ $\therefore n=5$

$f(x)=x^5+x$로 놓으면 $f(2)=34$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^n+x-34}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=k$

이때 $f'(x)=5x^4+1$이므로 $k=f'(2)=5\cdot16+1=81$

$\therefore n+k=5+81=86$ 답 **86**

0311 $f(x)=x^9-x^8+x^7-x^6+x^5$으로 놓으면 $f(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=9x^8-8x^7+7x^6-6x^5+5x^4$이므로

$f'(1)=9-8+7-6+5=7$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-1}{x-1}=f'(1)=7$ 답 **7**

0312 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x+2)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)=3x^2+12x$

$ax^2+4ax+2b-c=3x^2+12x$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=3$, $2b-c=0$ …… ㉠

또, $f'(-1)=1$이므로 $-2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=7$, $c=14$

따라서 $f'(x)=6x+7$이므로

$f'(-2)=-12+7=-5$ 답 ②

0313 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$x(2ax+b)-(ax^2+bx+c)=x^2+3$

$ax^2-c=x^2+3$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $c=-3$

또, $f'(1)=3$이므로 $2a+b=3$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x-3$이므로

$f(2)=4+2-3=3$ 답 ⑤

0314 $f(x)f'(x)=9x+12$ ····· ㉠

$f(x)$를 n차식이라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차식이고 ㉠의 우변이 일차식이므로

$n+(n-1)=1$, $2n=2$ $\therefore n=1$

따라서 $f(x)$는 일차식이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 $f'(x)=a$

$f(x)$, $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$(ax+b)a=9x+12$

$a^2x+ab=9x+12$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a^2=9$, $ab=12$

$\therefore a=3$, $b=4$ 또는 $a=-3$, $b=-4$

(i) $a=3$, $b=4$일 때, $f(x)=3x+4$이므로

$f(1)f(2)=7\cdot10=70$

(ii) $a=-3$, $b=-4$일 때, $f(x)=-3x-4$이므로

$f(1)f(2)=-7\cdot(-10)=70$

(i), (ii)에서 $f(1)f(2)=70$ 답 **70**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 51~53쪽

0315 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{7-1}{2}=3$$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2-(a+h)+1\}-(a^2-a+1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2ah-h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+2a-1)=2a-1\end{aligned}$$

즉, $2a-1=3$이므로 $a=2$ 답 ④

0316 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-g(a+h)}{h}$ → $f(a)=g(a)$이므로 식의 값은 변하지 않는다.

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+h)-f(a)\}-\{g(a+h)-g(a)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\&=f'(a)-g'(a)=1-g'(a)\end{aligned}$$

즉, $1-g'(a)=3$이므로 $g'(a)=-2$ 답 **−2**

0317 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 -6이므로

$f'(1)=-6$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right\}\\&=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}\cdot(-6)\\&=-2\end{aligned}$$ 답 **−2**

0318 $\lim_{x\to2}\frac{f(x+2)-6}{x^2-4}=3$에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x+2)-6\}=0$이므로 $f(4)=6$

$x+2=a$로 놓으면 $x\to2$일 때 $a\to4$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x+2)-6}{x^2-4}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x+2)-6}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{a\to4}\frac{f(a)-f(4)}{a(a-4)}\\&=\lim_{a\to4}\left\{\frac{f(a)-f(4)}{a-4}\cdot\frac{1}{a}\right\}=\frac{1}{4}f'(4)\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{4}f'(4)=3$이므로 $f'(4)=12$

$\therefore f(4)+f'(4)=6+12=18$ 답 **18**

0319 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore f'(-a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)\\&=-f'(a)\end{aligned}$$

즉, $f'(2)=-3$에서 $f'(-2)=-f'(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore&\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}\\&=\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot(x-2)\right\}\\&=f'(4)\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)\\&=6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4)=-8\end{aligned}$$ 답 ①

0320 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(1)=0$, $f'(1)<0$, $f(2)<0$, $f'(2)=0$, $f(3)=0$, $f'(3)>0$

또, $g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)<0$

$g'(2)=f(2)+2f'(2)<0$

$g'(3)=f(3)+3f'(3)>0$

ㄱ. $f(1)+g'(1)=g'(1)<0$

ㄴ. $g(2)g'(2)=2f(2)g'(2)>0$

ㄷ. $f(3)+g'(3)=g'(3)>0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0321 ㄱ. $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)|x-2|}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}|x-2|=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. $f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}$는 $x=2$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=2$에서 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0322 ① $\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)=2$

② 점 $(4, f(4))$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(4)<0$

③ 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

⑤ $f'(x)=0$인 x의 값은 열린구간 $(-1, 1)$, $(4, 5)$에서 각각 한 개씩 존재하고, 열린구간 $(1, 2)$의 모든 점에서 $f'(x)=0$이다. 답 ⑤

0323 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-3xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-3x$$
$$=f'(0)-3x=-3x-2$$

답 $f'(x)=-3x-2$

0324 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x^2-4}=2$에서 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(2)=2$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}=\frac{1}{4}f'(2)$$

즉, $\frac{1}{4}f'(2)=2$에서 $f'(2)=8$

또, $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x^3-8}=1$에서 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{g(x)-1\}=0$이므로 $g(2)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x^3-8}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}g'(2)$$

즉, $\frac{1}{12}g'(2)=1$에서 $g'(2)=12$

따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$y'=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=8\cdot 1+2\cdot 12=32$ 답 32

0325 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$$

$f'(x)=8x^3-3$이므로 $f'(1)=5$

$\therefore$ (주어진 식)$=5f'(1)=5\cdot 5=25$ 답 25

0326 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=-3$이므로
$f(x)$의 최고차항은 $-3x^2$이다.
$f(x)=-3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f'(x)=-6x+a$
조건 (나)에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(1)=5$
$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-6+a$
즉, $-6+a=-8$이므로 $a=-2$
따라서 $f'(x)=-6x-2$이므로
$f'(-1)=6-2=4$ 답 4

0327 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로
$f(3)=1$, $f'(3)=-1$
$g(x)=x^2+xf(x)$에서 $g'(x)=2x+f(x)+xf'(x)$
$\therefore g'(3)=2\cdot3+f(3)+3f'(3)$
$=6+1+3\cdot(-1)=4$ 답 4

0328 다항식 x^5+ax^4+b를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^5+ax^4+b=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1+a+b=0$ $\therefore a+b=1$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$5x^4+4ax^3=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$
위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$5-4a=0$ $\therefore a=\frac{5}{4}$
$a=\frac{5}{4}$를 ㉡에 대입하면
$\frac{5}{4}+b=1$ $\therefore b=-\frac{1}{4}$
$\therefore a-b=\frac{5}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$ 답 ⑤

0329 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=a+b=7$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f'(1)=a=20$
$a=20$을 ㉡에 대입하면
$20+b=7$ $\therefore b=-13$
따라서 $R(x)=20x-13$이므로
$R(2)=40-13=27$ 답 27

0330 조건 (가)에서 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\therefore f(0)=1$ …… ㉮

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+2h-1-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2$$
$$=f'(0)+2$$

…… ㉯
이때 $f'(1)=1$이므로
$f'(0)+2=1$ $\therefore f'(0)=-1$ …… ㉰
답 -1

단계	채점요소	배점
㉮	$f(0)$의 값 구하기	30 %
㉯	$f'(1)$을 $f'(0)$으로 나타내기	40 %
㉰	$f'(0)$의 값 구하기	30 %

0331 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $b+3=1+a$
$\therefore a-b=2$ …… ㉠
…… ㉮
또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+a)-(1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(bx+3)-(b+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{b(x-1)}{x-1}=b$$

$\therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$
…… ㉯
$\therefore a+b=4+2=6$ …… ㉰
답 6

단계	채점요소	배점
㉮	a, b의 관계식 구하기	40 %
㉯	a, b의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	10 %

0332 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-a\}=0$이므로 $f(2)=a$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$ ····· ㉮

한편, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $bx+3$이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ ····· ㉠ ····· ㉯

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2b+3=a$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=11$ ····· ㉰

$\therefore a+b=11+4=15$ ····· ㉱

답 15

단계	채점요소	배점
㉮	$f(2)$를 a로 나타내고 $f'(2)$의 값 구하기	30%
㉯	$f(x)$의 식 세우기	20%
㉰	a, b의 값 구하기	40%
㉱	$a+b$의 값 구하기	10%

0333 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq 1$인 상수)으로 놓으면

$\{f(x)\}^2-f(x^2)$의 최고차항은 $a^2x^{2n}-ax^{2n}=a(a-1)x^{2n}$

$x^3f(x)$의 최고차항은 ax^{n+3}

이때 조건 ㈎에서 극한값이 존재하므로

$2n=n+3 \quad \therefore n=3$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=\dfrac{a(a-1)}{a}=a-1$

이므로 $a-1=4 \quad \therefore a=5$

따라서 $f(x)$의 최고차항이 $5x^3$이므로

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$ (b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

조건 ㈏에서 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$이므로

$f'(0)=0 \quad \therefore c=0$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to 0}(15x+2b)=2b$

이므로 $2b=4 \quad \therefore b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$ **답 19**

0334 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)$

$\therefore \lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$ ($\because f(x+2)=f(x)$)

$-a+b-1+1=a+b+1+1$

$2a=-2 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x^3+bx^2+x+1$ ($-1\le x<1$)

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to -1+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to -1+}\dfrac{(-x^3+bx^2+x+1)-(1+b)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to -1+}\dfrac{-(x^2-1)(x-b)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+}\{-(x-1)(x-b)\}$

$=-2(b+1)$

$x+2=t$로 놓으면 $x\to -1-$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to -1-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{t\to 1-}\dfrac{f(t-2)-f(-1)}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1-}\dfrac{f(t)-f(-1)}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1-}\dfrac{(-t^3+bt^2+t+1)-(1+b)}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1-}\dfrac{-(t^2-1)(t-b)}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1-}\{-(t+1)(t-b)\}$

$=2(b-1)$

즉, $-2(b+1)=2(b-1)$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=-x^3+x+1$이므로 $f'(x)=-3x^2+1$

$\therefore f(101)+f'(101)=f(2\cdot 51-1)+f'(2\cdot 51-1)$

$=f(-1)+f'(-1)$

$=1+(-2)=-1$ **답 −1**

0335 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (-2\le x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x-1 & (0<x\le 2)\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}-1 & (-2\le x\le -1)\\ x & (-1<x<0,\ 0<x<1)\\ 1 & (x=0,\ 1\le x\le 2)\end{cases}$

ㄱ. $f(x)+g(x)=\begin{cases}2x+1 & (-1\le x\le 0)\\ 2x-1 & (0<x\le 1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0+}(2x-1)=-1$

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0-}(2x+1)=1$

이므로 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases}-x-1 & (-2\le x\le -1)\\ x^2+x & (-1<x\le 0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to -1} f(x)g(x)=f(-1)g(-1)=0$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1+}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1+}x=-1$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1-}\frac{-x-1}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\frac{-(x+1)}{x+1}$$

$=-1$

이므로 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}x-1 & (0<x<1)\\ 0 & (1\le x\le 2)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(1)=0$이므로 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{0}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x-1}{x-1}=1$$

이므로 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

04 도함수의 활용 (1)

교과서 문제 정복하기

본문 55쪽

0336 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로

$f'(2)=2\cdot 2=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=4(x-2)$

$\therefore y=4x-5$ 답 $y=4x-5$

0337 $f(x)=2x^2-3x+7$로 놓으면 $f'(x)=4x-3$이므로

$f'(1)=4\cdot 1-3=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-6=1\cdot(x-1)$

$\therefore y=x+5$ 답 $y=x+5$

0338 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-4$로 놓으면 $f'(x)=x^2+4x$이므로

$f'(-3)=(-3)^2+4\cdot(-3)=-3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-3(x+3)$

$\therefore y=-3x-4$ 답 $y=-3x-4$

0339 $f(x)=-x^3+6x+8$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+6$이므로

$f'(-1)=(-3)\cdot(-1)^2+6=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=3(x+1)$

$\therefore y=3x+6$ 답 $y=3x+6$

0340 $f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+5)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-2t+3=1$ $\therefore t=1$

따라서 구하는 접선은 점 $(1,\ 7)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y-7=x-1$ $\therefore y=x+6$ 답 $y=x+6$

0341 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+3$으로 놓으면 $f'(x)=x-5$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-5t+3\right)$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=t-5=1$ $\therefore t=6$

따라서 구하는 접선은 점 $(6, -9)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y+9=x-6$ $\therefore y=x-15$ **답 $y=x-15$**

0342 $f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t)라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$ $\therefore t=\pm1$

(i) $t=1$일 때

점 $(1, -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y+1=x-1$ $\therefore y=x-2$

(ii) $t=-1$일 때

점 $(-1, 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y-1=x+1$ $\therefore y=x+2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x-2$, $y=x+2$이다.

답 $y=x-2$, $y=x+2$

0343 $f(x)=-x^3+4x$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+4$이므로

$f'(2)=(-3)\cdot2^2+4=-8$

따라서 점 $(2, 0)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{8}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{8}(x-2)$

$\therefore y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$ **답 $y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$**

0344 $f(x)=x^3+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+5)라 하면 직선 $y=3x+1$에 평행한 접선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3t^2=3$ $\therefore t=\pm1$

(i) $t=1$일 때

점 $(1, 6)$을 지나고 기울기가 3인 직선이므로

$y-6=3(x-1)$ $\therefore y=3x+3$

(ii) $t=-1$일 때

점 $(-1, 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선이므로

$y-4=3(x+1)$ $\therefore y=3x+7$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x+3$, $y=3x+7$이다.

답 $y=3x+3$, $y=3x+7$

0345 $f(x)=x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (t, t^2-t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(2t-1)x-t^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=-t^2+2t-1$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$ …… ㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하면

$y=-x$, $y=3x-4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=-x$, $y=3x-4$이다.

답 $y=-x$, $y=3x-4$

0346 $f(x)=x^3-x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x$

접점의 좌표를 (t, t^3-t^2-2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t^2-2)=(3t^2-2t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2-2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3-2t^2+2t-2$, $t^3+t^2-t+2=0$

$(t+2)(t^2-t+1)=0$ $\therefore t=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=16x+18$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=16x+18$이다.

답 $y=16x+18$

0347 함수 $f(x)=x^2-4x$는 닫힌구간 $[-1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 5)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(5)=5$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$이므로

$f'(c)=2c-4=0$ $\therefore c=2$ **답 2**

0348 함수 $f(x)=3x-x^2$은 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(2)=2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3-2x$이므로

$f'(c)=3-2c=0$ $\therefore c=\frac{3}{2}$ **답 $\frac{3}{2}$**

0349 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-4$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며

$f(-1)=f(3)=-1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2x-5$이므로

$f'(c)=3c^2-2c-5=0$

$(3c-5)(c+1)=0$ $\therefore c=\frac{5}{3}$ ($\because -1<c<3$)

따라서 실수 c의 개수는 1이다. **답 1**

0350 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 1과 3 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x$이므로 $\frac{9-1}{3-1}=2c$

$2c=4 \quad \therefore c=2$ 답 2

0351 함수 $f(x)=x^2-2x$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$인 c가 1과 5 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $\frac{15-(-1)}{5-1}=2c-2$

$2c-2=4 \quad \therefore c=3$ 답 3

0352 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$은 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$인 c가 -3과 3 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-2x$이므로 $\frac{0-(-18)}{3-(-3)}=c^2-2c$

$c^2-2c-3=0$, $(c+1)(c-3)=0$

$\therefore c=-1$ ($\because -3<c<3$)

따라서 실수 c의 개수는 1이다. 답 1

유형 익히기 본문 56~62쪽

0353 $f(x)=x^3+ax^2+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax$

점 $(2, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=8+4a+b=6$

$\therefore 4a+b=-2$ ····· ㉠

점 $(2, 6)$에서의 접선의 기울기가 8이므로

$f'(2)=12+4a=8 \quad \therefore a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$ 답 1

0354 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(2)=-3$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+5h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+5h)-f(2)}{5h}\cdot 5$$
$$=5f'(2)$$
$$=5\cdot(-3)=-15$$ 답 −15

0355 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6ax+b$

점 $(-1, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=-1+3a-b+c=1$

$\therefore 3a-b+c=2$ ····· ㉠

점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기가 15이므로

$f'(-1)=3-6a+b=15$

$\therefore -6a+b=12$ ····· ㉡

x좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(2)=12+12a+b=6$

$\therefore 12a+b=-6$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=11$

$\therefore a-b+c=-1-6+11=4$ 답 4

0356 $f(x)=-x^3+9x^2-20x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+18x-20=-3(x-3)^2+7$이므로

$f'(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 7을 갖는다.

$\therefore M=7$

이때 $f(3)=-27+81-60+1=-5$이므로 접점의 좌표는 $(3, -5)$이다.

$\therefore p=3$, $q=-5$

$\therefore p+q+M=3+(-5)+7=5$ 답 5

0357 $f(x)=x^3-x^2+ax+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x+a$

점 $(1, 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1-1+a+2=3 \quad \therefore a=1$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2+1=2$

따라서 점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$

$\therefore b=2$, $c=1$

$\therefore abc=1\cdot 2\cdot 1=2$ 답 ②

0358 $f(x)=-3x^2+7x-4$로 놓으면 $f'(x)=-6x+7$

점 $(0, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=7$이므로 직선 l의 방정식은

$y+4=7x \quad \therefore y=7x-4$ ····· ㉠

또, 점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-5$이므로 직선 m의 방정식은

$y+2=-5(x-2) \quad \therefore y=-5x+8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(1, 3)$이다. 답 $(1, 3)$

0359 $f(0)=f(3)=f(4)=a$ (a는 상수)라 하면
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$f(x)=x(x-3)(x-4)+a$로 놓을 수 있다.
이때 점 $(2, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(2)=2\cdot(-1)\cdot(-2)+a=-1$ $\therefore a=-5$
따라서 $f(x)=x(x-3)(x-4)-5=x^3-7x^2+12x-5$이므로
$f'(x)=3x^2-14x+12$에서 $f'(2)=-4$
따라서 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 -4인 접선의 방정식은
$y+1=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+7$ 답 $\boldsymbol{y=-4x+7}$

0360 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-3}{x+1}=-2$에서 $x\longrightarrow -1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$
이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(-1)=3$ ㉮

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)=-2$$ ㉯

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기는 -2이므로 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 방정식은
$y-3=-2(x+1)$ $\therefore y=-2x+1$ ㉰

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로
$a+b=-1$ ㉱

답 $\boldsymbol{-1}$

단계	채점요소	배점
㉮	$f(-1)$의 값 구하기	30%
㉯	$f'(-1)$의 값 구하기	30%
㉰	접선의 방정식 구하기	30%
㉱	$a+b$의 값 구하기	10%

0361 $f(x)=x(x+1)(2-x)$로 놓으면
$f'(x)=(x+1)(2-x)+x(2-x)-x(x+1)$
$=-3x^2+2x+2$
점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-12+4+2=-6$
이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{6}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-0=\dfrac{1}{6}(x-2)$ $\therefore y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}$
따라서 $m=\dfrac{1}{6}$, $n=-\dfrac{1}{3}$이므로 $m+n=-\dfrac{1}{6}$ 답 ③

0362 $f(x)=2x-\dfrac{1}{3}x^3$으로 놓으면 $f'(x)=2-x^2$
접점의 좌표를 $\left(a, 2a-\dfrac{1}{3}a^3\right)$이라 하면 직선 $x-2y+10=0$,
즉 $y=\dfrac{1}{2}x+5$와 수직인 접선의 기울기는 -2이므로
$f'(a)=2-a^2=-2$, $a^2=4$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 접점의 좌표는 $\left(-2, -\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y+\dfrac{4}{3}=-2(x+2)$, $y-\dfrac{4}{3}=-2(x-2)$
$\therefore y=-2x-\dfrac{16}{3}$, $y=-2x+\dfrac{16}{3}$

답 $\boldsymbol{y=-2x-\dfrac{16}{3}}$, $\boldsymbol{y=-2x+\dfrac{16}{3}}$

0363 $f(x)=x^3-ax$, $g(x)=x^2+bx+c$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-a$, $g'(x)=2x+b$
두 곡선이 점 $(1, -1)$에서 만나므로
$f(1)=1-a=-1$ $\therefore a=2$ …… ㉠
$g(1)=1+b+c=-1$ $\therefore b+c=-2$ …… ㉡
또, 점 $(1, -1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로
$f'(1)g'(1)=-1$에서
$(3-a)(2+b)=-1$ …… ㉢
㉠을 ㉢에 대입하면 $b=-3$
이것을 ㉡에 대입하면 $c=1$
$\therefore abc=-6$ 답 $\boldsymbol{-6}$

0364 $f(x)=x^3+kx^2-3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2kx$
$f'(-1)=3-2k$, $f'(1)=3+2k$
x좌표가 -1인 점에서의 접선과 x좌표가 1인 점에서의 접선이 서로 수직이므로
$f'(-1)f'(1)=-1$에서 $(3-2k)(3+2k)=-1$
$9-4k^2=-1$, $k^2=\dfrac{5}{2}$
$\therefore k=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ($\because k$는 양수) 답 ④

0365 $f(x)=x^3-4x^2+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-8x$
점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-5$이므로 접선의 방정식은
$y-2=-5(x-1)$ $\therefore y=-5x+7$
이 직선이 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$-5x+7=x^3-4x^2+5$에서
$x^3-4x^2+5x-2=0$, $(x-1)^2(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -3)$이므로
$a=2$, $b=-3$ $\therefore a-b=5$ 답 **5**

0366 $f(x)=-x^3+3x^2+x-7$로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+6x+1$
점 P(2, −1)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은
$y+1=x-2$ $\therefore y=x-3$
이때 점 Q의 좌표는 (3, 0)이다.
또, 직선 $y=x-3$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x-3=-x^3+3x^2+x-7$에서
$x^3-3x^2+4=0$, $(x-2)^2(x+1)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-1$
따라서 점 R의 좌표는 (−1, −4)이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(3-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$
$\overline{PR}=\sqrt{(-1-2)^2+(-4+1)^2}=3\sqrt{2}$
$\therefore \overline{PQ}:\overline{PR}=\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$ 답 ②

0367 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}x$로 놓으면
$f'(x)=x^2-4x+\frac{4}{3}$
점 O(0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=\frac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$
이 직선이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}x$에서 $x^3-6x^2=0$, $x^2(x-6)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=6$
따라서 점 A의 좌표는 (6, 8)이고, 점 M은 $\overline{OA}$의 중점이므로
$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\frac{\sqrt{6^2+8^2}}{2}=5$ 답 **5**

0368 $f(x)=3x^2-4x+1$로 놓으면 $f'(x)=6x-4$
접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-4a+1)$이라 하면 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$에 평행한 직선의 기울기는 −1이므로
$f'(a)=6a-4=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$
따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y+\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore y=-x+\frac{1}{4}$ 답 ②

0369 $f(x)=x^3-4x+a$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4$
점 P의 좌표를 $(t,\ t^3-4t+a)$라 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-4t+a)=(3t^2-4)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3+a$
이 직선이 직선 $y=-x+b$와 일치해야 하므로
$3t^2-4=-1$, $t^2=1$ $\therefore t=1$ 또는 $t=-1$ …… ㉠
$-2t^3+a=b$ …… ㉡
이때 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 ㉠에서 $t=1$
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $-2+a=b$
$\therefore a-b=2$ 답 **2**

0370 $f(x)=x^3+6x^2+7x-1$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+12x+7$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3+6a^2+7a-1)$이라 하면 접선의 기울기가 −5이므로
$f'(a)=3a^2+12a+7=-5$
$3a^2+12a+12=0$, $a^2+4a+4=0$
$(a+2)^2=0$ $\therefore a=-2$
즉, 접점의 좌표는 (−2, 1)이므로 접선의 방정식은
$y-1=-5(x+2)$ $\therefore y=-5x-9$
따라서 구하는 y절편은 −9이다. 답 **−9**

0371 $f(x)=-x^2+3x+2$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$
접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a+2)$라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로
$f'(a)=-2a+3=1$ $\therefore a=1$
따라서 접점의 좌표는 (1, 4)이다. 답 **(1, 4)**

0372 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x-9$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-9t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t-9$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-3t^2-9t+a)=(3t^2-6t-9)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-6t-9)x-2t^3+3t^2+a$
이 직선이 직선 $y=-12x+11$과 일치해야 하므로
$3t^2-6t-9=-12$ …… ㉠
$-2t^3+3t^2+a=11$ …… ㉡
㉠에서 $3t^2-6t+3=0$, $t^2-2t+1=0$
$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $-2+3+a=11$
$\therefore a=10$ 답 ④

0373 곡선 $y=x^2-4x+a$와 직선 $y=-2x+1$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$일 때 접선의 기울기는 −2이다.
$f(x)=x^2-4x+a$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$이므로
$f'(t)=2t-4=-2$ $\therefore t=1$
따라서 접점의 좌표가 (1, −1)이므로 $x=1$, $y=-1$을 $y=x^2-4x+a$에 대입하면
$-1=1-4+a$ $\therefore a=2$
$\therefore at=2\cdot1=2$ 답 **2**

0374 $f(x)=x^3+ax+3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (−1, c)에서 직선 $y=4x+b$와 접하므로

$f(-1)=-1-a+3=c$ …… ㉠

$f'(-1)=3+a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $c=1$

따라서 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=4(x+1)$ $\therefore y=4x+5$

$\therefore b=5$

$\therefore abc=1\cdot5\cdot1=5$ 답 ④

0375 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

접점의 좌표를 $(t, t^3+at^2+2at+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+2at+1)=(3t^2+2at+2a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+2a)x-2t^3-at^2+1$

이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치해야 하므로

$3t^2+2at+2a=3$ …… ㉠

$-2t^3-at^2+1=1$ …… ㉡

㉡에서 $t^2(2t+a)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$

(i) $t=0$일 때, ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $t=-\frac{a}{2}$일 때, ㉠에 대입하면

$3\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^2+2a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+2a=3$

$a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은 $\frac{3}{2}\cdot2\cdot6=18$ 답 **18**

0376 $f(x)=x^3-x+3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+3)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3$, $t^3=1$ $\therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=2x+1$

따라서 구하는 y절편은 1이다. 답 **1**

0377 $f(x)=x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$

이 직선이 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-(2t+1)-t^2$, $t^2+2t=0$

$t(t+2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(0)f'(-2)=1\cdot(-3)=-3$ 답 **−3**

0378 $f(x)=x^3-5x^2+6x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10x+6$

접점의 좌표를 (t, t^3-5t^2+6t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-10t+6$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t^2+6t)=(3t^2-10t+6)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-10t+6)x-2t^3+5t^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$4=-(3t^2-10t+6)-2t^3+5t^2$, $-2t^3+2t^2+10t-10=0$

$t^3-t^2-5t+5=0$, $(t-1)(t^2-5)=0$

그런데 접선의 기울기가 유리수이므로 $t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=-x+3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$ab=-3$ 답 ③

0379 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{4}t^2+1\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^2+1\right)=\frac{1}{2}t(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2+1$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로 $a=-\frac{1}{4}t^2+1$

$\therefore t^2+4(a-1)=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 t_1, t_2라 하면 두 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}t_1$, $\frac{1}{2}t_2$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{1}{2}t_1\cdot\frac{1}{2}t_2=-1$ $\therefore t_1t_2=-4$ …… ㉡

또한, ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=4(a-1)$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $4(a-1)=-4$

$\therefore a=0$ 답 **0**

0380 $f(x)=x^3+2x^2$, $g(x)=-x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x$, $g'(x)=-2x$

두 곡선이 x좌표가 t인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+2t^2=-t^2+4$

$t^3+3t^2-4=0$, $(t-1)(t+2)^2=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-2$

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+4t=-2t$

$3t^2+6t=0$, $3t(t+2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

따라서 $t=-2$일 때, 즉 점 $(-2, 0)$에서 공통인 접선을 갖고
$f'(-2)=g'(-2)=4$이므로 공통인 접선의 방정식은
$y-0=4(x+2)$
$\therefore y=4x+8$ 답 ④

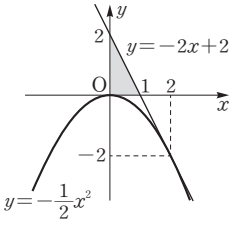
0381 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$로 놓으면
$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로
$f(1)=1+a+b=3$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠
$g(1)=-1+c=3$ $\therefore c=4$
점 $(1, 3)$에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기가 같으므로
$f'(1)=g'(1)$에서 $2+a=-2$ $\therefore a=-4$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore a-b-c=-14$ 답 ①

0382 $f(x)=x^3+ax+1$, $g(x)=x^2$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$
두 곡선이 x좌표가 t인 점에서 접한다고 하면
$f(t)=g(t)$에서
$t^3+at+1=t^2$ …… ㉠ ㉮
$f'(t)=g'(t)$에서
$3t^2+a=2t$ $\therefore a=2t-3t^2$ …… ㉡ ㉯
㉡을 ㉠에 대입하면
$t^3+(2t-3t^2)t+1=t^2$, $2t^3-t^2-1=0$
$(t-1)(2t^2+t+1)=0$
$\therefore t=1$ ($\because 2t^2+t+1>0$)
따라서 $t=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$ ㉰

답 -1

단계	채점요소	배점
㉮	$f(t)=g(t)$임을 이용하여 식 세우기	30%
㉯	$f'(t)=g'(t)$임을 이용하여 식 세우기	30%
㉰	t와 a의 값 구하기	40%

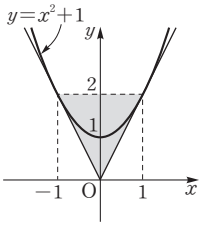
0383 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $f'(x)=-x$
점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$이므로 접선의 방정식은 $y+2=-2(x-2)$
$\therefore y=-2x+2$
오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-2x+2$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(1, 0)$, $(0, 2)$이므로 구하는 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$



답 ①

0384 $f(x)=x^3+a$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
$f(2)=8+a$, $f'(2)=12$이므로 x좌표가 2인 점에서의 접선의 방정식은
$y-(8+a)=12(x-2)$ $\therefore y=12x+a-16$
이때 접선 $y=12x+a-16$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{3}-\frac{a}{12}, 0\right)$, $(0, a-16)$이므로 x좌표가 2인 점에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{a}{12}\right)\cdot(16-a)=\frac{2}{3}$에서
$a^2-32a+240=0$, $(a-12)(a-20)=0$
$\therefore a=12$ 또는 $a=20$
그런데 $0<a<16$이므로 $a=12$ 답 **12**

0385 $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+1)=2t(x-t)$
$\therefore y=2tx-t^2+1$
이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로
$t^2-1=0$, $(t-1)(t+1)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=-1$
따라서 두 접점의 좌표는
$(1, 2)$, $(-1, 2)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$



답 ③

0386 $f(x)=-x^2-3x+4$로 놓으면 $f'(x)=-2x-3$
곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표는
$-x^2-3x+4=0$, $(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
점 A는 x축의 음의 부분에서 만나므로 A$(-4, 0)$이다.
곡선이 y축과 만나는 점의 좌표는 B$(0, f(0))$, 즉 B$(0, 4)$이다.
이때 직선 AB의 기울기는 $\frac{0-4}{-4-0}=1$
한편, 직선 CD가 곡선과 만나는 접점의 좌표를 $(t, -t^2-3t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-3$이고 직선 AB의 기울기와 같으므로
$-2t-3=1$ $\therefore t=-2$
이때 접점의 좌표는 $(-2, 6)$이므로 직선 CD의 방정식은
$y-6=x+2$ $\therefore y=x+8$
따라서 C$(-8, 0)$, D$(0, 8)$이고, □ABDC의 넓이는 △OCD의 넓이에서 △OAB의 넓이를 뺀 것과 같다.
$\therefore$ □ABDC$=$△OCD$-$△OAB
$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8-\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=24$ 답 **24**

0387 $f(x)=(x+a)(x-a)=x^2-a^2$으로 놓으면
$f'(x)=2x$

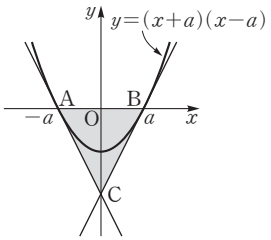
곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$이라 하면 $f'(-a)=-2a$, $f'(a)=2a$

점 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-2a(x+a)=-2ax-2a^2$

점 $\mathrm{B}(a,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2a(x-a)=2ax-2a^2$



…… ㉮

두 접선의 교점을 C라 하면 점 C의 x좌표는

$-2ax-2a^2=2ax-2a^2$에서 $x=0$ ($\because a\neq 0$)

$\therefore \mathrm{C}(0,\ -2a^2)$

…… ㉯

이때 $\triangle ACB$의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OC}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^2=16$

$2a^3=16$, $a^3=8$

$\therefore a=2$

…… ㉰

답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	두 점 A, B에서의 접선의 방정식 구하기	40%
㉯	두 접선의 교점의 좌표 구하기	30%
㉰	a의 값 구하기	30%

0388 $f(x)=a(x-1)^2-2=ax^2-2ax+a-2$로 놓으면

$f'(x)=2ax-2a$

점 $(0,\ a-2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a-2)=-2ax$ $\therefore y=-2ax+a-2$

이때 직선 $y=-2ax+a-2$의 x절편과 y절편은

$0=-2ax+a-2$에서 $x=\frac{a-2}{2a}$

$y=a-2$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{a-2}{2a},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}(0,\ a-2)$이므로 삼각형 OPQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{a-2}{2a}\right|\cdot|a-2|=\frac{(a-2)^2}{4a}$

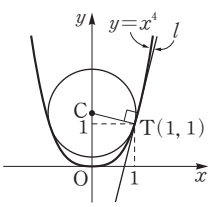
$\therefore \lim\limits_{a\to 0+} aS=\lim\limits_{a\to 0+}\frac{(a-2)^2}{4}=1$

답 **1**

0389 원의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ a)$, 접점을 $\mathrm{T}(1,\ 1)$이라 하면 $\overline{CT}$와 접선 l은 수직이다.

$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

점 $\mathrm{T}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로



(직선 CT의 기울기)$=\frac{1-a}{1-0}=-\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{5}{4}$

$\therefore \mathrm{C}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$

이때 원의 반지름의 길이 r는

$r=\overline{CT}=\sqrt{1^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

따라서 원의 넓이는

$\pi r^2=\frac{17}{16}\pi$

답 $\frac{17}{16}\pi$

0390 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$

원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

두 점 $(1,\ 1)$, $(a,\ 0)$을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

$\frac{1-0}{1-a}=-\frac{1}{3}$ $\therefore a=4$

이때 원의 반지름의 길이 r는 두 점 $(1,\ 1)$, $(4,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(4-1)^2+1^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

답 $\sqrt{10}$

0391 $f(x)=-x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4)$라 하면

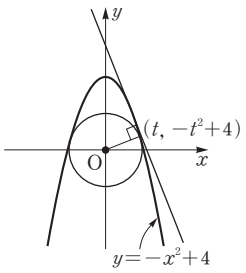
이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t$

두 점 $(t,\ -t^2+4)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선은 접선과 수직이므로

$\frac{-t^2+4}{t}=\frac{1}{2t}$, $t^2=\frac{7}{2}$

$\therefore t=-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{14}}{2}$



따라서 두 접점의 좌표는

$\left(-\frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

…… ㉮

이때 원의 반지름의 길이 r는 원점과 접점 사이의 거리이므로

$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

…… ㉯

따라서 원의 둘레의 길이는

$2\pi r=2\pi\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}\,\pi$

…… ㉰

답 $\sqrt{15}\,\pi$

단계	채점요소	배점
㉮	두 접점의 좌표 구하기	40%
㉯	원의 반지름의 길이 구하기	40%
㉰	원의 둘레의 길이 구하기	20%

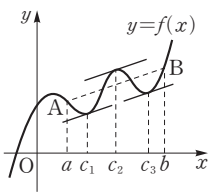
0392 함수 $f(x)=(x+2)(x-3)^2$은 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하며
$f(-2)=f(3)=0$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=(x-3)(3x+1)$이므로
$f'(c)=(c-3)(3c+1)=0$
$\therefore c=-\frac{1}{3}$ ($\because -2<c<3$) 답 ①

0393 함수 $f(x)=-2x^2+4x$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며
$f(-1)=f(3)=-6$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-4x+4$이므로
$f'(c)=-4c+4=0$
$\therefore c=1$ 답 ④

0394 함수 $f(x)=-2x^3-4x^2+8x+3$은 닫힌구간 $[-a, a]$에서 롤의 정리를 만족시키므로 $f(-a)=f(a)$이다.
$2a^3-4a^2-8a+3=-2a^3-4a^2+8a+3$
$4a^3-16a=0$, $4a(a-2)(a+2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a$는 자연수)
롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-6x^2-8x+8$이므로
$f'(c)=-6c^2-8c+8=-2(3c-2)(c+2)=0$
$\therefore c=\frac{2}{3}$ ($\because -2<c<2$)
$\therefore \frac{a}{c}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$ 답 3

0395 함수 $f(x)=2x^2-4x+1$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x-4$이므로 $\frac{7-(-1)}{3-1}=4c-4$
$4c-4=4$ $\therefore c=2$ 답 2

0396 닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 오른쪽 그림에서 직선 AB의 기울기와 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 같은 점의 x좌표이다.
이때 직선 AB와 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 실수 c의 개수는 3이다. 답 3



0397 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.
$a<x<b$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이므로
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$
따라서 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로
$h(x)=f(x)-g(x)=k$ (k는 상수)
즉, $f(x)=g(x)+k$이다.
답 (가) 연속 (나) 미분가능 (다) 0

0398 함수 $f(x)=-x^2+5x$에 대하여 닫힌구간 $[a, 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 0이 존재하므로
$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=f'(0)$
이때 $f'(x)=-2x+5$이므로
$\frac{4-(-a^2+5a)}{1-a}=5$, $a^2=1$
$\therefore a=-1$ ($\because a<0$) 답 ⑤

0399 $f(x)=2x^2$에서 $f'(x)=4x$
$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$에서
$2(x+h)^2-2x^2=4h(x+\theta h)$
$2h(2x+h)=4h(x+\theta h)$
$2x+h=2x+2\theta h$
$\therefore \theta=\frac{1}{2}$ ($\because h\neq 0$) 답 ①

0400 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-5, x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x-5, x+1)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}=f'(c)$ $(x-5<c<x+1)$
인 c가 적어도 하나 존재한다.
이때 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로
$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-5)\}=6\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}$
$=6\lim_{c\to\infty}f'(c)$
$=6\cdot(-2)=-12$ 답 −12

유형 up

본문 63쪽

0401 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-11$과 평행한 접선의

접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로

$f'(t)=2t=2 \quad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 1)$이고, 점 $(1, 1)$과 직선 $y=2x-11$, 즉 $2x-y-11=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|2-1-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

0402 $f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t)라 하면 접선의 기울기가 10이므로

$f'(t)=3t^2-2=10$

$3t^2-12=0$, $3(t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, -4)$, $(2, 4)$이다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(2+2)^2+(4+4)^2}=4\sqrt{5}$ 답 $4\sqrt{5}$

0403 $f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라 하면 접선의 기울기가 9이므로

$f'(t)=3t^2-6t=9$

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -2)$, $(3, 2)$이므로 두 접선의 방정식은

$y+2=9(x+1) \quad \therefore 9x-y+7=0$ …… ㉠

$y-2=9(x-3) \quad \therefore 9x-y-25=0$ …… ㉡

두 직선 ㉠, ㉡ 사이의 거리는 직선 ㉠ 위의 점 $(0, 7)$과 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|0-7-25|}{\sqrt{9^2+(-1)^2}}=\frac{32}{\sqrt{82}}=\frac{16\sqrt{82}}{41}$ 답 ②

0404 $f(x)=x^2+5x+8$로 놓으면 $f'(x)=2x+5$

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-(-5)}{-5-1}=-1$이므로

직선 AB의 방정식은

$y+5=-(x-1) \quad \therefore x+y+4=0$

곡선의 접점 중에서 직선 AB와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+5t+8)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

$f'(t)=2t+5=-1 \quad \therefore t=-3$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, 2)$이므로 P$(-3, 2)$일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최소이다.

직선 AB와 점 P 사이의 거리는

$\frac{|-3+2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(-5-1)^2}=6\sqrt{2}$이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=9$ 답 9

0405 $f(x)=x^3-4x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-8x$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t^2+1)=(3t^2-8t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-8t)x-2t^3+4t^2+1$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=(3t^2-8t)a-2t^3+4t^2+1$

$t\{2t^2-(4+3a)t+8a\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $2t^2-(4+3a)t+8a=0$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2-(4+3a)t+8a=0$이 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $2t^2-(4+3a)t+8a=0$이 $t=0$을 중근으로 갖는 경우

$2t^2=0$이므로 $4+3a=0$, $8a=0$

그런데 이를 만족시키는 a의 값이 존재하지 않으므로 이 이차방정식은 $t=0$을 중근으로 갖지 않는다.

(ii) $2t^2-(4+3a)t+8a=0$이 실근을 갖지 않는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4+3a)^2-64a<0$

$9a^2-40a+16<0$, $(9a-4)(a-4)<0$

$\therefore \frac{4}{9}<a<4$

(i), (ii)에서 $\frac{4}{9}<a<4$ 답 ①

0406 $f(x)=x^2-3x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t-1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t-1)=(2t-3)(x-t)$

$\therefore y=(2t-3)x-t^2-1$

이 직선이 점 $(a, -2)$를 지나므로

$-2=(2t-3)a-t^2-1$

$\therefore t^2-2at+3a-1=0$

위의 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 각각 두 점 B, C의 x좌표이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=2a$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$\frac{a+t_1+t_2}{3}=\frac{a+2a}{3}=3$

$\therefore a=3$ 답 3

0407 $f(x)=-x^2+3$으로 놓으면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+3$

이 직선이 점 P(1, 6)을 지나므로

$6=-2t+t^2+3$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는

Q(−1, 2), R(3, −6)

$\therefore \overline{QR}=\sqrt{(-1-3)^2+(2+6)^2}=4\sqrt{5}$

직선 QR의 기울기는 $\frac{2-(-6)}{-1-3}=-2$이므로

직선 QR의 방정식은

$y-2=-2(x+1)$ $\therefore 2x+y=0$

직선 QR와 점 P(1, 6) 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot1+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$ 답 **16**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 64~65쪽

0408 $f(x)=x^3+6x^2+10x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x+10=3(x+2)^2-2$

따라서 접선의 기울기는 $x=-2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

$f(-2)=-8$이므로 기울기가 최소인 접선의 방정식은

$y+8=-2(x+2)$ $\therefore y=-2x-12$

즉, $a=-2$, $b=-12$이므로

$ab=24$ 답 **24**

0409 $f(x)=x^2-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$이므로 $f'(t)=2t-3$

점 (t, t^2-3t+1)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t+1)=(2t-3)(x-t)$

$\therefore y=(2t-3)x-t^2+1$

$\therefore g(t)=-t^2+1$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{g(t+2)-g(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\{-(t+2)^2+1\}-(-t^2+1)}{t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t-4}{t}=-4$ 답 ②

0410 $f(x)=ax^3-2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3ax^2-4x$

점 $(1, b)$에서의 접선이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+4$와 수직이므로 접선의 기울기는 $f'(1)=3a-4=2$ $\therefore a=2$

$b=f(1)=2-2+1=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ 답 **3**

0411 $f(x)=x^3-4x+a$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t+a)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t+a)=(3t^2-4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3+a$

이 직선이 직선 $y=ax-4$와 일치하므로

$a=3t^2-4$ …… ㉠

$-2t^3+a=-4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-2t^3+3t^2-4=-4$, $t^2(2t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

(i) $t=0$일 때, $a=-4$

(ii) $t=\frac{3}{2}$일 때, $a=\frac{11}{4}$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $-4\cdot\frac{11}{4}=-11$ 답 **−11**

0412 $f(x)=x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (t, t^2-t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(2t-1)x-t^2$

이 직선이 점 (1, −1)을 지나므로

$-1=2t-1-t^2$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

이때 접선의 기울기가 음수이어야 하므로 $t=0$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x$이고 이 직선이 점 $(a, -5)$를 지나므로

$a=5$ 답 ④

0413 $f(x)=x^3-x+3$, $g(x)=x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 x좌표가 t $(t>0)$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3-t+3=t^2+a$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2-1=2t$ …… ㉡

㉡에서 $3t^2-2t-1=0$, $(3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ $(\because t>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $a=2$ 답 **2**

0414 $f(x)=x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+2$

이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=2t-t^2+2,\ t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 두 점을 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$, $\mathrm{C}(3,\ 11)$이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$12\cdot4-\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2\cdot12+\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\right)$

$=48-(4+12+16)$

$=16$

답 ③

0415 함수 $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-(a+b)$이므로

$f'(c)=2c-(a+b)=0 \quad \therefore c=\frac{a+b}{2}$

답 ④

0416 곡선의 접점 중에서 직선 OA와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ at(t-2)^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3at^2-8at+4a$

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P에서의 접선은 직선 OA와 평행하므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a=1$

$\frac{3}{4}a=1 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$

답 ②

0417 점 $(2,\ a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점이므로

$a=f(2)=2^3-4\cdot2+5=5$ ····· ㉮

$f'(x)=3x^2-4$에서 $f'(2)=8$

즉, 점 $(2,\ 5)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은

$y-5=8(x-2) \quad \therefore y=8x-11$ ····· ㉠ ㉯

따라서 구하는 접선은 직선 ㉠과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$x=8y-11 \quad \therefore y=\frac{1}{8}x+\frac{11}{8}$ ····· ㉰

답 $y=\frac{1}{8}x+\frac{11}{8}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30%
㉯	곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 방정식 구하기	30%
㉰	구하는 접선의 방정식 구하기	40%

0418 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+a$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^2+a\right)=\frac{1}{2}t(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2+a$

이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{2}t\cdot(-4)-\frac{1}{4}t^2+a$

$\therefore t^2+8t-4a=0$ ····· ㉠ ㉮

이차방정식 ㉠의 두 근을 t_1, t_2라 하면 두 접선의 기울기는

$\frac{1}{2}t_1$, $\frac{1}{2}t_2$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{1}{2}t_1\cdot\frac{1}{2}t_2=-1 \quad \therefore t_1t_2=-4$ ····· ㉡ ㉯

또한, ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=-4a$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $-4=-4a \quad \therefore a=1$ ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	t, a의 관계식 세우기	40%
㉯	기울기의 곱을 이용하여 t_1, t_2의 관계식 세우기	30%
㉰	a의 값 구하기	30%

0419 $f(x)=x^3+(a+3)x^2-ax+7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2(a+3)x-a$

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2(a+3)t-a$

이때 $3t^2+2(a+3)t-a=-\frac{1}{3}$, 즉

$3t^2+2(a+3)t-a+\frac{1}{3}=0$을 만족시키는 실수 t의 값이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-3\cdot\left(-a+\frac{1}{3}\right)<0$

$a^2+6a+9+3a-1<0$

$a^2+9a+8<0,\ (a+1)(a+8)<0$

$\therefore -8<a<-1$

따라서 정수 a는 -7, -6, -5, -4, -3, -2의 6개이다.

답 6

0420 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 7]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 7)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(7)-f(1)}{7-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 7)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 ㈏에서 $|f'(c)|=\left|\frac{f(7)-f(1)}{7-1}\right|\le\frac{1}{3}$

$\left|\frac{a-2}{6}\right|\le\frac{1}{3}$, $|a-2|\le2$

$-2\le a-2\le2$ $\therefore 0\le a\le4$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ 5이다. 답 ⑤

0421 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

곡선 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2)$ $\therefore y=4x-4$

이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이므로 $a_1=1$

또한, 곡선 위의 점 (a_n, a_n^2)에서의 접선의 기울기가 $f'(a_n)=2a_n$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^2=2a_n(x-a_n)$

$\therefore y=2a_nx-a_n^2$

이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

즉,

$a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1=\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{1}{2}\cdot a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$a_4=\frac{1}{2}\cdot a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\vdots$

이므로 $a_{11}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 답 ④

05 도함수의 활용 (2)

교과서 문제 정복하기

본문 67쪽

0422 $x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다. 답 증가

0423 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3-(-x_2^3)$

$=-(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$

$\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$

이므로 $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

답 감소

0424 $x_1<x_2<3$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^2+6x_1)-(-x_2^2+6x_2)$

$=-(x_1^2-x_2^2)+6(x_1-x_2)$

$=-(x_1-x_2)(x_1+x_2-6)<0$

$x_1<3$, $x_2<3$이므로 $x_1+x_2-6<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, 3)$에서 증가한다. 답 증가

0425 $f(x)=3x-x^2$에서 $f'(x)=3-2x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌구간 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$에서 증가하고,

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

반닫힌 구간 $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0426 $f(x)=x^2-x-2$에서 $f'(x)=2x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌구간 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$에서 감소하고, 반닫힌 구간 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

답 풀이 참조

0427 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-4$에서 $f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

반닫힌 구간 $(-\infty, -2]$와 반닫힌 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0428 함수 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이며 극댓값은
$f(-1)=6$
또, $x=3$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이며 극솟값은 $f(3)=-26$

답 극댓값: 6, 극솟값: -26

0429 (1) 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=b$, $x=d$에서 극댓값을 갖는다.
(2) 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=f$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=a$, $x=c$, $x=f$에서 극솟값을 갖는다.

답 (1) b, d (2) a, c, f

0430 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 3을 가지므로 $f(5)=3$
$x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$
$\therefore f(5)+f'(2)=3+0=3$ 답 3

0431 $f(x)=x^3-12x$에서
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16, $x=2$에서 극솟값 -16을 갖는다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

답 극댓값: 16, 극솟값: -16

0432 $f(x)=-x^3+3x+1$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0433 $f(x)=x^4-2x^2$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=-1$과 $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 답 극댓값: 0, 극솟값: -1

0434 $f(x)=-3x^4+4x^3-1$에서
$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 0을 갖고, 극솟값은 없다.

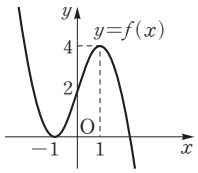
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

답 극댓값: 0, 극솟값: 없다.

0435 $f(x)=-x^3+3x+2$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

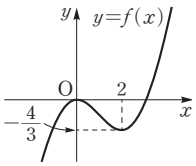


답 풀이 참조

0436 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$에서
$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

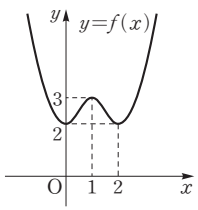


답 풀이 참조

0437 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+2$에서
$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0438 $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 20, $x=0$과 $x=3$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 **최댓값: 20, 최솟값: 0**

0439 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 최댓값 2, $x=0$과 $x=3$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 **최댓값: 2, 최솟값: -2**

0440 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3$에서

$f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 12, $x=3$에서 최솟값 $-\frac{27}{4}$을 갖는다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0
$f(x)$	12	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{4}$

답 **최댓값: 12, 최솟값: $-\frac{27}{4}$**

0441 $f(x)=3x^4-4x^3+1$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	17

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 17, $x=1$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 **최댓값: 17, 최솟값: 0**

유형 익히기

본문 68~76쪽

0442 $f(x)=-x^3-3x^2+24x-2$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-82	$\nearrow$	26	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4, 2]$에서 증가하므로

$a=-4$, $b=2$

$\therefore a+b=-2$

답 **-2**

0443 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 닫힌구간 $[1, 2]$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, 2이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+2=-\frac{2a}{3}$, $1\cdot2=\frac{b}{3}$

따라서 $a=-\frac{9}{2}$, $b=6$이므로

$2a+b=-3$

답 **-3**

0444 $f(x)=2x^3+ax^2+36x+9$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+36$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $b\le x\le3$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 b, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+3=-\frac{a}{3}$, $3b=6$

따라서 $b=2$, $a=-15$이므로

$b-a=17$

답 **17**

0445 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $-1\le x\le2$에서 증가하고 $x\le-1$ 또는 $x\ge2$에서 감소하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, 2이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=\frac{2a}{3}$, $(-1)\cdot2=-\frac{b}{3}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=6$이므로

$ab=9$

답 **9**

0446 $f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+5$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a+6$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)\le 0$, $a^2-3a-18\le 0$

$(a+3)(a-6)\le 0$ $\therefore -3\le a\le 6$

따라서 정수 a의 최댓값은 6이다. 답 ③

0447 $f(x)=-x^3+ax^2-12x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-12$

..... ㉮

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$, $(a+6)(a-6)\le 0$

$\therefore -6\le a\le 6$

..... ㉯

답 $-6\le a\le 6$

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)$ 구하기	30%
㉯	a의 값의 범위 구하기	70%

0448 $f(x)=ax^3+x^2-x$에서

$f'(x)=3ax^2+2x-1$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $a<0$ ..... ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=1+3a\le 0$ $\therefore a\le -\frac{1}{3}$ ..... ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -\frac{1}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 ③

0449 $f(x)=-x^3+ax^2+ax+7$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+a$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2+3a\le 0$, $a(a+3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 0$ 답 ③

0450 $f(x)=x^3+2kx^2+4x$에서

$f'(x)=3x^2+4kx+4$

$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$는 일대일함수이어야 하고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4k^2-12\le 0$, $k^2-3\le 0$

$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})\le 0$ $\therefore -\sqrt{3}\le k\le \sqrt{3}$ 답 ③

0451 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$에서

$f'(x)=x^2-2ax+3a$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$

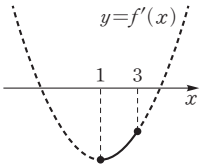
$\therefore 0\le a\le 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다. 답 **3**

0452 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 감소하려면 $1\le x\le 3$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=a-3\le 0$에서 $a\le 3$ ..... ㉠

$f'(3)=a+9\le 0$에서 $a\le -9$ ..... ㉡

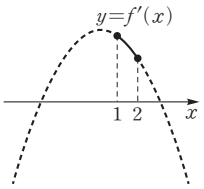
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$a\le -9$ 답 ①

0453 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 증가하려면 $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=-1+a\ge 0$에서 $a\ge 1$ ..... ㉠

$f'(2)=-8+a\ge 0$에서 $a\ge 8$ ..... ㉡

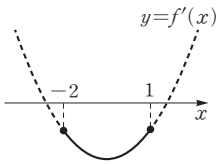
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$a\ge 8$ 답 $a\ge 8$

0454 $f(x)=x^3+kx^2-8x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-8$

함수 $f(x)$가 $-2\le x\le 1$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(-2)=12-4k-8\le 0$에서

$k\ge 1$ ..... ㉠

$f'(1)=3+2k-8\le 0$에서 $k\le \frac{5}{2}$ ..... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $1\le k\le \frac{5}{2}$

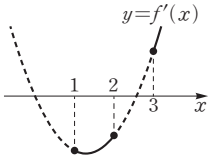
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$ 답 ④

0455 $f(x)=x^3+ax^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 감소하고, 반닫힌 구간 $[3, \infty)$에서 증가하려면 $1\le x\le 2$일 때 $f'(x)\le 0$, $x\ge 3$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=3+2a\le 0$에서 $a\le -\frac{3}{2}$ … ㉠

$f'(2)=12+4a\le 0$에서 $a\le -3$ … ㉡

$f'(3)=27+6a\ge 0$에서 $a\ge -\frac{9}{2}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{9}{2}\le a\le -3$ 답 $-\frac{9}{2}\le a\le -3$

0456 $f(x)=-2x^3+6x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 5, $x=-1$에서 극솟값 -3을 가지므로

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	5	↘

$M=5$, $m=-3$

$\therefore M+m=2$ 답 ①

0457 $f(x)=x^4-4x^3+15$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -12를 가지므로

x	…	0	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	-12	↗

$a=3$, $b=-12$

$\therefore a+b=-9$ 답 ②

0458 $f(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x-7$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12$

$=-4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	…	-1	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모든 x의 값의 합은

$(-1)+1+3=3$ 답 3

0459 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 13, $x=3$에서 극솟값 -19를 가지므로

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	13	↘	-19	↗

A$(-1, 13)$, B$(3, -19)$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{13-19}{2}\right)$, 즉 $(1, -3)$이다. 답 $(1, -3)$

0460 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$ …… ㉠

$f(2)=23$에서 $11+4a+2b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=24$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x+3$이므로

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	…	2	…	4	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	23	↘	19	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 19를 갖는다. 답 ⑤

0461 $f(x)=-x^3+27x+a$에서

$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

x	…	-3	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$a-54$	↗	$a+54$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $a-54$, $x=3$에서 극댓값 $a+54$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 10이므로

$(a+54)+(a-54)=10$

$2a=10$ $\therefore a=5$ 답 5

0462 $f(x)=-2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 1을 가지므로

$b=-2$, $f(-2)=16-24+a=1$ $\therefore a=9$

$\therefore a-b=9-(-2)=11$ 답 ③

0463 $f(x)=x^3+(2a+4)x^2-5x$에서

$f'(x)=3x^2+2(2a+4)x-5$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $3x^2+2(2a+4)x-5=0$의 두 근이다.

이때 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(2a+4)}{3}=0$

$\therefore a=-2$ 답 -2

0464 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 그래프가 원점을 지나는 삼차함수이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=3$에서 극값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1과 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-\dfrac{2a}{3}$, $(-1)\cdot 3=\dfrac{b}{3}$ $\therefore a=-3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x$

…… ㉮

이때 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9=5$

…… ㉯

답 5

단계	채점요소	배점
㉮	함수 $f(x)$ 구하기	60%
㉯	함수 $f(x)$의 극댓값 구하기	40%

0465 $f(x)=2x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+1$에서

$f'(x)=6x^2-3ax=3x(2x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{a}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\dfrac{a}{2}$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$

그런데 $f(0)=1\neq 0$이므로 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2\left(\dfrac{a}{2}\right)^3-\dfrac{3}{2}a\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+1=0$, $-\dfrac{1}{8}a^3+1=0$

$\therefore a=2$ 답 2

0466 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값 1을 가지므로

$f(3)=1$, $f'(3)=0$

이때 $g(x)=(-2x+1)f(x)$에서

$g(3)=-5f(3)=(-5)\cdot 1=-5$

$g'(x)=-2f(x)+(-2x+1)f'(x)$에서

$g'(3)=-2f(3)-5f'(3)=-2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-5)=-2(x-3)$ $\therefore 2x+y-1=0$

따라서 원점과 직선 $2x+y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

0467 조건 ㈎에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=xg(x)$ ($g(x)$는 다항함수)라 하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)}{x}=g(0)=-2$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $f'(1)=0$, $f(1)=-3$

한편 $f(x)=xg(x)$에서 $f'(x)=g(x)+xg'(x)$이므로

$f'(1)=g(1)+g'(1)=0$ …… ㉡

$f(1)=g(1)=-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항함수 $g(x)$는 이차함수이므로 $g(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$g(0)=c=-2$

$g(1)=a+b+c=-3$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉣

$g'(x)=2ax+b$에서 $g'(1)=2a+b=3$ ($\because$ ㉡, ㉢) …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-5$

$\therefore g(x)=4x^2-5x-2$

$\therefore f(x)=x(4x^2-5x-2)=4x^3-5x^2-2x$

답 $\boldsymbol{f(x)=4x^3-5x^2-2x}$

0468 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	…	0	…	4	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은 $f(0)=10$ 답 ③

0469 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 3이므로
$f'(0)=c=3$
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로
이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -3과 1이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+1=-\frac{2b}{3a}$, $(-3)\cdot 1=\frac{c}{3a}=\frac{1}{a}$
$\therefore a=-\frac{1}{3}$, $b=-1$
이때 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값, $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

이때 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+d$이므로 구하는 차는
$f(1)-f(-3)=\left(-\frac{1}{3}-1+3+d\right)-(9-9-9+d)$
$=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

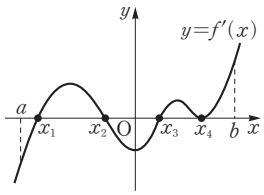
0470 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(-2)=0$이므로
$f'(0)=c=0$
$f'(-2)=12a-4b=0$ $\therefore b=3a$ …… ㉠
이때 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -2, $x=-2$에서 극댓값 6을 가지므로

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(0)=d=-2$
$f(-2)=-8a+4b-2=6$ $\therefore 2a-b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=6$
따라서 $f(x)=2x^3+6x^2-2$이므로
$f(1)=2+6-2=6$ 답 6

0471 ① $x>-1$일 때, $f'(x)\geq 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
② $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이다.
③ $f'(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
④ $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 $f(x)$의 극값은 $x=-1$에서의 극솟값 1개뿐이다.
⑤ 열린구간 $(2, 4)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
답 ③

0472 오른쪽 그림에서 $x=x_2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_2$에서 극댓값을 갖는다.



$\therefore m=1$
또, $x=x_1$, $x=x_3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_1$, $x=x_3$에서 극솟값을 갖는다.
$\therefore n=2$
$\therefore m-n=-1$ 답 -1

0473 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 점의 x좌표는 -4, 7이므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=7$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 구하는 모든 x의 값의 합은
$-4+7=3$ 답 3

0474 ㄱ. $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $x=a$, $x=e$, $x=g$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 점은 3개이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0475 ㄱ. 열린구간 (α, β)에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. $x=\beta$, $x=\gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$, $x=\gamma$에서 극값을 갖는다. 즉, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 2개이다.
ㄷ. $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0476 $f(x)=x^3+ax^2+12x+2$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+12$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-36>0$, $(a+6)(a-6)>0$
$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$ 답 ①

0477 $f(x)=x^3+3x^2+ax-1$에서
$f'(x)=3x^2+6x+a$
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0$ $\therefore a<3$ 답 $a<3$

0478 $f(x)=3x^3+(k+2)x^2+kx+1$에서

$f'(x)=9x^2+2(k+2)x+k$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-9k>0$, $k^2-5k+4>0$

$(k-1)(k-4)>0$ $\therefore k<1$ 또는 $k>4$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=5$ 답 ③

0479 $f(x)=x^3+3ax^2+ax-2$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3a>0$, $3a(3a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

0480 $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le0$, $(a+3)(a-3)\le0$

$\therefore -3\le a\le3$ 답 ④

0481 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a-1)x^2-3ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-3(a-1)x-3a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9(a-1)^2+36a\le0$, $9(a+1)^2\le0$

$\therefore a=-1$ 답 ①

0482 $f(x)=x^3-3(a-1)x^2-3(b^2-9)x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6(a-1)x-3(b^2-9)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{3(a-1)\}^2+3\{3(b^2-9)\}\le0$

$9(a-1)^2+9(b^2-9)\le0$

$(a-1)^2+b^2\le9$ ㉮

(i) $a=1$일 때

$b^2\le9$, $-3\le b\le3$이므로 $b=1, 2, 3$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개

(ii) $a=2$일 때

$b^2\le8$, $-2\sqrt{2}\le b\le2\sqrt{2}$이므로 $b=1, 2$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개

(iii) $a=3$일 때

$b^2\le5$, $-\sqrt{5}\le b\le\sqrt{5}$이므로 $b=1, 2$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$의 2개

(iv) $a=4$일 때

$b^2\le0$이므로 순서쌍 (a, b)는 없다.

㉯

(i)~(iv)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+2+2=7$

㉰

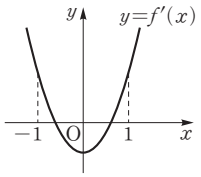
답 7

단계	채점요소	배점
㉮	극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
㉯	순서쌍 (a, b) 구하기	60 %
㉰	순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	10 %

0483 $f(x)=x^3+px^2+(p-1)x$에서

$f'(x)=3x^2+2px+p-1$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=p^2-3(p-1)>0$에서

$p^2-3p+3=\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 p에 대하여 성립한다.

(ii) $f'(-1)=2-p>0$에서 $p<2$

(iii) $f'(1)=3p+2>0$에서 $p>-\frac{2}{3}$

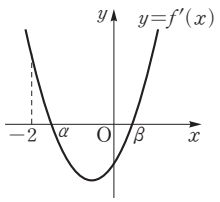
(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{p}{3}$이므로

$-1<-\frac{p}{3}<1$ $\therefore -3<p<3$

(i)~(iv)에서 실수 p의 값의 범위는 $-\frac{2}{3}<p<2$

따라서 정수 p는 0, 1의 2개이다. 답 2

0484 $f(x)=2x^3+3x^2+kx-5$에서



$f'(x)=6x^2+6x+k$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-2<\alpha<0$, $\beta>0$

이어야 하므로

(i) $f'(-2)=24-12+k>0$ $\therefore k>-12$

(ii) $f'(0)=k<0$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-12<k<0$이므로

$a=-12$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=(-12)^2+0^2=144$ **답 144**

0485 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

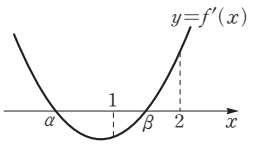
$\frac{D}{4}=9a^2-9a>0$, $9a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$ …… ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

즉, $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 $1\le\beta\le2$이어야 한다.



(i) $f'(1)=3-6a+3a\le0$

$\therefore a\ge1$ …… ㉡

(ii) $f'(2)=12-12a+3a\ge0$

$\therefore a\le\frac{4}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 a의 값의 범위는

$1<a\le\frac{4}{3}$ **답 ④**

0486 $f(x)=-x^4+4x^3+4ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+8ax=-4x(x^2-3x-2a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\ne0$, $D=9+8a>0$에서 $-\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 $\alpha=-\frac{9}{8}$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{9}{8}$ **답 $-\frac{9}{8}$**

0487 $f(x)=3x^4-8x^3+6ax^2+7$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2+12ax=12x(x^2-2x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\ne0$, $\frac{D}{4}=1-a>0$에서

$a<0$ 또는 $0<a<1$ **답 $a<0$ 또는 $0<a<1$**

0488 $f(x)=-3x^4-8x^3+6(k+3)x^2-12kx$에서

$f'(x)=-12x^3-24x^2+12(k+3)x-12k$

$=-12(x-1)(x^2+3x-k)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+3x-k=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $-12(x-1)(x^2+3x-k)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x-k=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9+4k<0$ $\therefore k<-\frac{9}{4}$

(ii) $-12(x-1)(x^2+3x-k)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x-k=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2+3x-k=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$1+3-k=0$ $\therefore k=4$

$x^2+3x-k=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가지면

$D=9+4k=0$ $\therefore k=-\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$k=4$ 또는 $k\le-\frac{9}{4}$

답 $k=4$ 또는 $k\le-\frac{9}{4}$

0489 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2+ax+2a=0$이 $x=-1$을 근으로 가지면

$1-a+2a=0$ $\therefore a=-1$

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가지면 $D=a(a-8)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $a=-1$ 또는 $0\le a\le8$이므로 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 10개이다. **답 10**

0490 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+3$에서
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	23	$\searrow$	-4	$\nearrow$	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 23, $x=1$에서 최솟값 -4를 가지므로 $M=23$, $m=-4$
$\therefore M+m=23+(-4)=19$ 답 ②

0491 $f(x)=x^4-2x^2-2$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 최솟값 -3을 가지므로 $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=-3$
$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-1)^2+1^2+(-3)^2=11$ 답 **11**

0492 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$에서
$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	18	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	9

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 18, $x=0$에서 최솟값 1을 가지므로 $M=18$, $m=1$
$\therefore Mm=18$ 답 **18**

0493 $x^2-4x+2=t$로 놓으면
$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
$0\le x\le 4$에서 t의 값의 범위는 $-2\le t\le 2$
$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면
$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$
$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$
따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 최댓값 17, $t=2$에서 최솟값 -15를 가지므로

t	-2	$\cdots$	2
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	17	$\searrow$	-15

$M=17$, $m=-15$
$\therefore M+m=2$ 답 **2**

0494 $f(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x+a$에서
$f'(x)=12x^3-12x^2+12x-12=12(x-1)(x^2+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+1>0$)
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-7+a$를 가지므로

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-7+a$	$\nearrow$

$-7+a=1$
$\therefore a=8$ 답 ⑤

0495 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$에서
$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-16a+b$

$a>0$이므로 $-7a+b>-16a+b$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 b, $x=2$에서 최솟값 $-16a+b$를 가지므로
$b=3$, $-16a+b=-13$
따라서 $a=1$, $b=3$이므로
$a+b=4$ 답 ④

0496 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
닫힌구간 $[0, 3]$에서 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 3을 가지므로 $x=2$에서 극솟값 3을 가져야 한다.
$f'(2)=12+4a+b=0$, $4a+b=-12$ …… ㉠
$f(2)=8+4a+2b+5=3$, $2a+b=-5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{2}$, $b=2$
따라서 $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+5$이므로
$f(1)=1-\frac{7}{2}+2+5=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0497 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(1)=f'(3)=0$에서
$3+2a+b=0$ …… ㉠
$27+6a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$ ····· 가

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

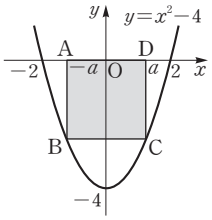
닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(1)=6$
$a+b+c+1=6$ $\therefore c=2$
$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ ····· 나

따라서 $f(0)=2$, $f(2)=4$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이다. ㉒

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(1)=f'(3)=0$에서 a, b의 값 구하기	30 %
㉯	c의 값과 $f(x)$ 구하기	40 %
㉰	함수 $f(x)$의 최솟값 구하기	30 %

0498 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 꼭짓점 D의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<2)$이라 하면



$A(-a, 0)$, $B(-a, a^2-4)$, $C(a, a^2-4)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+4)=-2a^3+8a$

$S'(a)=-6a^2+8=-2(3a^2-4)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $(\because 0<a<2)$

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

$S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-2\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+8\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$

답 $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

0499 곡선 $y=-x^2+3$ 위의 한 점의 좌표를 $(t, -t^2+3)$으로 놓으면 이 점과 점 $(5, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(t-5)^2+(-t^2+3-4)^2}=\sqrt{t^4+3t^2-10t+26}$

$f(t)=t^4+3t^2-10t+26$으로 놓으면

$f'(t)=4t^3+6t-10=2(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ $(\because 2t^2+2t+5>0)$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(1)=20$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	−	0	+
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 구하는 거리의 최솟값은

$\sqrt{f(1)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

0500 A제품 x개를 판매하여 얻는 이익을 $g(x)$원이라 하면

$g(x)=1000x-f(x)$

$=-x^3+180x^2-4000$ (단, $x>0$)

$g'(x)=-3x^2+360x=-3x(x-120)$

$g'(x)=0$에서 $x=120$ $(\because x>0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=120$일 때 극대이면서 최대이므로 이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 제품의 개수는 120이다.

x	(0)	$\cdots$	120	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	극대	↘

답 120

0501 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(12-2x)^2$ (단, $0<x<6$)

$V'(x)=(12-2x)^2+x\cdot2(12-2x)(-2)$

$=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ $(\because 0<x<6)$

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

$V(2)=2(12-4)^2=128$

답 128

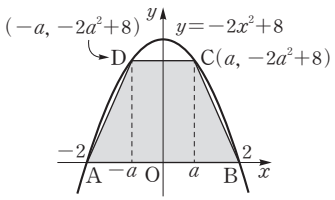
0502 $-2x^2+8=0$에서

$-2(x+2)(x-2)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore$ $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$

오른쪽 그림과 같이 사다리꼴 ABCD의 한 꼭짓점 C의 좌표를 $C(a, -2a^2+8)$ $(0<a<2)$이라 하면



$D(-a, -2a^2+8)$ ㉒

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a+4)(-2a^2+8)=-2a^3-4a^2+8a+16$ ㉓

$S'(a)=-6a^2-8a+8=-2(3a-2)(a+2)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}$ $(\because 0<a<2)$

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	$\frac{512}{27}$	↘	

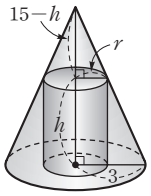
$M=S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{512}{27}$ ㉔

$\therefore$ $27M=512$ ㉕

답 512

단계	채점요소	배점
㉮	네 점 A, B, C, D의 좌표 구하기	30 %
㉯	사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(a)$ 구하기	30 %
㉰	M의 값 구하기	30 %
㉱	$27M$의 값 구하기	10 %

0503 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r\,(0<r<3)$라 하고 높이를 $h\,(0<h<15)$라 하면 오른쪽 그림에서



$15 : 3=(15-h) : r$

$3(15-h)=15r$ $\quad\therefore h=15-5r$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 할 때

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(15-5r)=\pi(15r^2-5r^3)$에서

$V'(r)=\pi(30r-15r^2)=15\pi r(2-r)$

$V'(r)=0$에서 $r=2$ ($\because 0<r<3$)

따라서 함수 $V(r)$는 $r=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 원기둥의 부피의 최댓값은

r	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

$V(2)=\pi\cdot2^2\cdot(15-5\cdot2)=20\pi$ 답 **20π**

0504 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 a, 높이를 x라 하면 피타고라스 정리에 의해

$a=\sqrt{144-x^2}$ (단, $0<x<12$)

사각기둥의 부피를 $V(x)$라 할 때

$V(x)=x(\sqrt{144-x^2})^2=x(144-x^2)$

$V'(x)=(144-x^2)+x\cdot(-2x)$

$\quad=-3x^2+144=-3(x^2-48)$

$\quad=-3(x+4\sqrt{3})(x-4\sqrt{3})$

$V'(x)=0$에서 $x=4\sqrt{3}$ ($\because 0<x<12$)

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 넓이는

x	(0)	$\cdots$	$4\sqrt{3}$	$\cdots$	(12)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

$a^2=144-(4\sqrt{3})^2=96$ 답 ⑤

유형 up

본문 77쪽

0505 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$

$f(0)>0$이므로 $d>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$ $\quad\therefore b<0$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$ $\quad\therefore c<0$

$\therefore ab<0$, $ac<0$, $bd<0$, $cd<0$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0506 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로 $a<0$

$f(0)>0$이므로 $d>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}<0$ $\quad\therefore b<0$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$ $\quad\therefore c<0$

따라서 그 값이 항상 양수인 것은 ④이다. 답 ④

0507 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 1이다.

따라서 함수 $f(x)$는 증가하다가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=-1$에서부터 계속 감소하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

0508 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 a, b, c이다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=c$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

시험에 꼭 나오는 문제

본문 78~81쪽

0509 $f(x)=x^3+ax^2+9x-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, b이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+1=-\dfrac{2a}{3}$, $b=3$

따라서 $a=-6$, $b=3$이므로

$a+b=-3$ 답 **-3**

0510 ㄱ. $f(x)=x^3+3x^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+4$에서

$g'(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

따라서 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

ㄷ. $h(x)=2x^3+6x^2-18x+1$에서

$h'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

따라서 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$일 때만 $h'(x)\geq 0$이므로 함수 $h(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하는 것은 아니다.

따라서 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0511 $f(x)=-x^3-ax^2+2ax+15$에서

$f'(x)=-3x^2-2ax+2a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2+6a\leq 0,\ a(a+6)\leq 0$

$\therefore\ -6\leq a\leq 0$

답 ③

0512 $f(x)=2x^3+ax^2$에서 $f'(x)=6x^2+2ax$

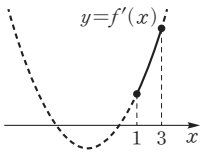
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 증가하려면 $1\leq x\leq 3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$f'(1)=6+2a\geq 0$ $\therefore\ a\geq -3$

$f'(3)=54+6a\geq 0$ $\therefore\ a\geq -9$

$\therefore\ a\geq -3$

따라서 실수 a의 최솟값은 -3이다.



답 ②

0513 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12$

$=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7, $x=2$에서 극솟값 6을 가지므로

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	6	↗

$M=7,\ m=6$

$\therefore\ Mm=42$

답 **42**

0514 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

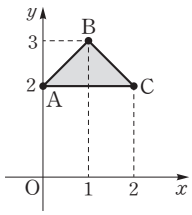
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극솟값 2, $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다.

A(0, 2), B(1, 3), C(2, 2)라 하면

이때 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$



답 ②

0515 $f(x)=-x^3-x^2+x+\frac{1}{3}$에서

$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖고, $x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $\frac{14}{27}$를 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{14}{27}$	↘

$g(x)=|f(x)|$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $\frac{14}{27}$를 가지므로 $g(x)$의 모든 극댓값의 합은

$\frac{2}{3}+\frac{14}{27}=\frac{32}{27}$

답 $\frac{32}{27}$

0516 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈎에서 $f(1)=1+a+b+c=3$

$\therefore\ a+b+c=2$ …… ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0$ $\therefore\ 2a+b=-3$ …… ㉡

조건 ㈏에서 $f'(2)=12+4a+b=-7$

$\therefore\ 4a+b=-19$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=13$

이를 ㉠에 대입하면 $c=-3$

따라서 $f(x)=x^3-8x^2+13x-3$이므로

$f(3)=27-72+39-3=-9$

답 -9

0517 $f(x)=x^3-3kx^2-9k^2x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6kx-9k^2=3(x+k)(x-3k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-k$ 또는 $x=3k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극댓값을 갖고, $x=3k$에서 극솟값을 갖는다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 극댓값과 극솟값의 차가 32이므로
$f(-k)-f(3k)=32$에서
$(-k^3-3k^3+9k^3+1)-(27k^3-27k^3-27k^3+1)=32$
$32k^3=32$, $k^3=1$
$\therefore k=1$ 답 **1**

0518 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이므로 $f'(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 3이다.
이때 조건 (나)에서 $x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(-1)=f'(2)=0$
에서 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-2$를 인수로 갖는다.
$\therefore f'(x)=3(x+1)(x-2)$
$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}$
$=f'(3)+f'(3)$
$=2f'(3)$
$=2\cdot 12=24$ 답 ⑤

0519 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 1이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

③ $f(x)$는 $-1<x<1$에서 감소한다.
①, ②, ④, ⑤ $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 답 ④

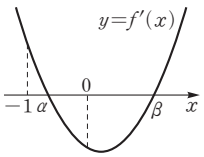
0520 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 1, 5이다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(3)=0$이고
$x=1$에서 극댓값 $f(1)$을 가지므로 $f(1)>0$
$x=5$에서 극솟값 $f(5)$를 가지므로 $f(5)<0$
$\therefore f(1)>f(5)$, $f(1)f(5)<0$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0521 $f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+1$에서
$f'(x)=3x^2-2ax+a+6$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=a^2-3(a+6)\le 0$
$a^2-3a-18\le 0$, $(a+3)(a-6)\le 0$
$\therefore -3\le a\le 6$
따라서 정수 a는 -3, -2, -1, $\cdots$, 4, 5, 6의 10개이다. 답 ④

0522 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에서
$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$
이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$-1<\alpha<0$, $\beta>0$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$f'(-1)=3+2(a+2)+a>0$
$\therefore a>-\dfrac{7}{3}$
$f'(0)=a<0$
$\therefore -\dfrac{7}{3}<a<0$



따라서 정수 a는 -2, -1이므로 모든 정수 a의 값의 곱은
$-2\cdot(-1)=2$ 답 ①

0523 $f(x)=x^4-4x^3+2ax^2+1$에서
$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$
최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$a\ne 0$, $D=9-4a>0$에서
$a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{9}{4}$
따라서 정수 a의 최댓값은 2이다. 답 ③

0524 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$에서
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4+k$	↗	$7+k$	↘	$-20+k$	↗	$-9+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $7+k$, $x=2$에서 최솟값 $-20+k$를 가지므로
$M=7+k$, $m=-20+k$
$\therefore M-m=7+k-(-20+k)=27$ 답 **27**

0525 $f(x)=-x^4+4a^3x-20$에서
$f'(x)=-4x^3+4a^3=-4(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$f'(x)=0$에서 $x=a$ $(\because x^2+ax+a^2>0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 $3a^4-20$을 가지므로

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$3a^4-20$	↘

$3a^4-20=a^4+12$

$a^4=16$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 양수)

답 **2**

0526 $f(x)=ax(x-3)^2+b=ax^3-6ax^2+9ax+b$이므로

$f'(x)=3ax^2-12ax+9a=3a(x-3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	b	↗	$4a+b$	↘	b	↗	$20a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $20a+b$, $x=0$과 $x=3$에서 최솟값 b를 가지므로

$20a+b=15$, $b=-5$

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로

$a^2+b^2=26$

답 **26**

0527 $f(x)=x^2-4x+4$에서 $f'(x)=2x-4$

$f'(a)=2a-4$이므로 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$y-b=(2a-4)(x-a)$ $\therefore y=(2a-4)x-2a^2+4a+b$

이때 점 (a, b)는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $b=a^2-4a+4$

$\therefore y=(2a-4)x-a^2+4$

따라서 접선의 x절편은 $\frac{a^2-4}{2a-4}=\frac{a+2}{2}$이고, 접선의 y절편은 $-a^2+4$이다.

삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+2}{2}\cdot(-a^2+4)=\frac{1}{4}(-a^3-2a^2+4a+8)$에서

$S'(a)=\frac{1}{4}(-3a^2-4a+4)=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$

$S'(a)=0$에서

$a=\frac{2}{3}$ ($\because 0<a<2$)

따라서 함수 $S(a)$는

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

$a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로

$b=\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+4=\frac{16}{9}$

$\therefore b-a=\frac{16}{9}-\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$

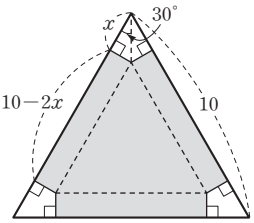
답 ③

0528 삼각기둥의 밑면의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(10-2x)^2=\sqrt{3}(x-5)^2$

이때 상자의 높이는

$x\cdot\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면



$V(x)=\sqrt{3}(x-5)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x=x(x-5)^2=x^3-10x^2+25x$

$V'(x)=3x^2-20x+25=(3x-5)(x-5)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{3}$ ($\because 0<x<5$)

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\frac{5}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로

x	(0)	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	(5)
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

$a=\frac{5}{3}$

$\therefore 3a=5$

답 **5**

0529 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

$\therefore |b+c|-|b|+|c|=-(b+c)-(-b)+(-c)=-2c$

답 ②

0530 $y=xf'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 0이다.

(i) $x<-1$일 때, $xf'(x)<0$이므로 $f'(x)>0$

(ii) $-1<x<0$일 때, $xf'(x)>0$이므로 $f'(x)<0$

(iii) $x>0$일 때, $xf'(x)>0$이므로 $f'(x)>0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0531 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ㉮

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$f'(x)=3x^2-4ax+a\geq 0$ ㉯

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4a^2-3a\le 0$, $a(4a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le\frac{3}{4}$

㉢

답 $0\le a\le\frac{3}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	함수 $f(x)$가 증가해야 함을 알기	30 %
㉯	$f'(x)$의 조건 알기	30 %
㉰	a의 값의 범위 구하기	40 %

0532 $f(x)=x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

㉮

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	⋯	0	⋯	4	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-32$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 k, $x=4$에서 극솟값 $k-32$를 갖는다.

㉯

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$f(0)=-f(4)$에서

$k=-(k-32)$, $2k=32$

$\therefore k=16$

㉰

답 16

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)$ 구하기	20 %
㉯	극댓값과 극솟값을 k에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉰	k의 값 구하기	40 %

0533 $f(x)=x^3-3kx^2+kx$에서

$f'(x)=3x^2-6kx+k$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9k^2-3k>0$, $3k(3k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{1}{3}$

㉮

(ii) $f'(0)=k>0$

㉯

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$이므로 $k>0$

㉰

(i), (ii), (iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k>\frac{1}{3}$

㉱

답 $k>\frac{1}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	판별식을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	30 %
㉯	$f'(0)$의 값을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	30 %
㉰	축의 방정식을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	30 %
㉱	k의 값의 범위 구하기	10 %

0534 $g(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge -1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+3t$

㉮

$f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

㉯

t	-1	⋯	1	⋯
$f'(t)$	0	+	0	−
$f(t)$	-2	↗	2	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최댓값 2를 가지므로

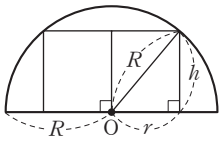
$(f\circ g)(x)$의 최댓값은 2이다.

㉰

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	$g(x)=t$로 놓고 $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 식으로 나타내기	30 %
㉯	$f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값 구하기	30 %
㉰	$(f\circ g)(x)$의 최댓값 구하기	40 %

0535 반구의 반지름의 길이를 R라 하자. 반구를 중심 O를 포함하여 밑면에 수직으로 자르면 단면은 오른쪽 그림과 같다.



$h=\sqrt{R^2-r^2}$이므로 원기둥의 부피는

$\pi r^2h=\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\pi\sqrt{r^4R^2-r^6}$

$f(r)=r^4R^2-r^6$으로 놓으면

$f'(r)=4r^3R^2-6r^5=2r^3(2R^2-3r^2)$

$=2r^3(\sqrt{2}R+\sqrt{3}r)(\sqrt{2}R-\sqrt{3}r)$

$f'(r)=0$에서 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ ($\because 0<r<R$)

즉, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$일 때 원기둥의 부피가 최대이다.

$\therefore \frac{h}{r}=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}=\frac{\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}R}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}R}{\sqrt{\frac{2}{3}}R}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

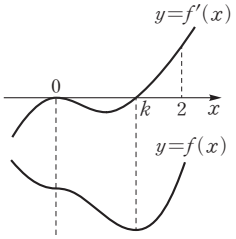
답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

06 도함수의 활용 (3)

교과서 문제 정복하기

본문 83쪽

0536 조건 (가)와 (나)에서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 실근 $x=k$를 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=0$에서 $f(x)=x^3(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^4+ax^3$에서 $f'(x)=4x^3+3ax^2$

$f'(2)=32+12a=16 \quad \therefore a=-\frac{4}{3}$

$f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)$이므로 $x=1$에서 최솟값 $f(1)=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$을 가진다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\frac{1}{3}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0537 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이고

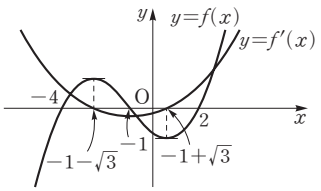
$f(-4)=f(-1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x+4)(x+1)(x-2)$ ($a>0$)로 놓으면

$f'(x)=3a(x^2+2x-2)=3a(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}$이므로

$y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(x)-f'(x)<0$에서 $f(x)<f'(x)$

(ii) $f(x)f'(x)<0$에서

$f(x)>0$, $f'(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $f'(x)>0$

(i), (ii)를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-4$ 또는 $-1+\sqrt{3}<x<2$

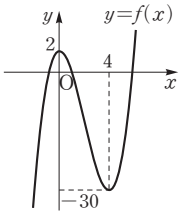
따라서 집합 S에 대하여 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0538 $f(x)=x^3-6x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-30	↗



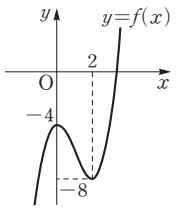
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 답 3

0539 $f(x)=x^3-3x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	-8	↗



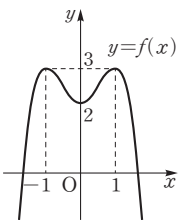
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 실근을 갖는다. 답 1

0540 $f(x)=-x^4+2x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗	3	↘



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 2

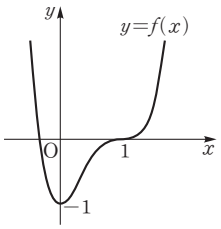
0541 $3x^4+6x^2=8x^3+1$에서 $3x^4-8x^3+6x^2-1=0$

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 **2**

0542 $f(x)=x^3-6x^2-15x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

(1) 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(5)<0$이어야 하므로

$(k+8)(k-100)<0$ $\therefore -8<k<100$

(2) 삼차방정식이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(5)=0$이어야 하므로

$(k+8)(k-100)=0$ $\therefore k=-8$ 또는 $k=100$

(3) 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(5)>0$이어야 하므로

$(k+8)(k-100)>0$ $\therefore k<-8$ 또는 $k>100$

답 (1) $\boldsymbol{-8<k<100}$ (2) $\boldsymbol{k=-8}$ 또는 $\boldsymbol{k=100}$ (3) $\boldsymbol{k<-8}$ 또는 $\boldsymbol{k>100}$

0543 $f(x)=3x^4-8x^3+18$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	18	$\searrow$	2	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=$ 2 에서 극소이면서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최솟값은 2 이다.

즉, $f(x)$ $>$ 0이므로

$3x^4-8x^3+18>0$

답 (가) **2** (나) **2** (다) $>$

0544 $f(x)=2x^3-3x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이므로

$f(x)\geq 2>0$, 즉 $2x^3-3x^2+3>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $2x^3-3x^2+3>0$이 성립한다.

답 **풀이 참조**

0545 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	k	$\nearrow$	$k+\frac{1}{4}$	$\searrow$	k	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $k\geq 0$

답 $\boldsymbol{k\geq 0}$

0546 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-8$이므로

시각 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\cdot 2^2-8\cdot 2=-4$, $a=6\cdot 2-8=4$

답 $\boldsymbol{v=-4}$, $\boldsymbol{a=4}$

0547 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+2$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-6$이므로

시각 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=-1$, $a=6\cdot 1-6=0$

답 $\boldsymbol{v=-1}$, $\boldsymbol{a=0}$

0548 $v=\frac{dx}{dt}=4t^3-4$, $a=\frac{dv}{dt}=12t^2$이므로

시각 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4\cdot 2^3-4=28$, $a=12\cdot 2^2=48$

답 $\boldsymbol{v=28}$, $\boldsymbol{a=48}$

0549 $\frac{dl}{dt}=2t+4$이므로

시각 $t=2$에서의 물체의 길이의 변화율은

$2\cdot 2+4=8$

답 **8**

0550 (1) 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi(0.2t)^2=0.16\pi t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=0.32\pi t$

따라서 시각 $t=15$에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$0.32\pi\cdot 15=4.8\pi$

(2) 구의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(0.2t)^3=\frac{0.032}{3}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=0.032\pi t^2$

따라서 시각 $t=20$에서의 구의 부피의 변화율은

$0.032\pi\cdot 20^2=12.8\pi$

답 (1) $\boldsymbol{4.8\pi}$ (2) $\boldsymbol{12.8\pi}$

유형 익/히/기

본문 84~90쪽

0551 $x^3-3x^2+2-k=0$에서 $x^3-3x^2+2=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x^2+2$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

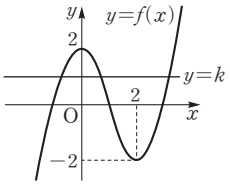
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-2<k<2$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1이므로 3개이다.



답 3

0552 $x^4-4x^3-2x^2+12x-a=0$에서 $x^4-4x^3-2x^2+12x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면

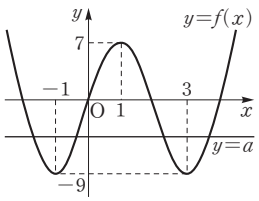
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	…	−1	…	1	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−9	↗	7	↘	−9	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$-9<a<7$ 답 $-9<a<7$



0553 $x^4+4x^3+28=8x^2+k$에서 $x^4+4x^3-8x^2+28=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4+4x^3-8x^2+28$과 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+28$로 놓으면

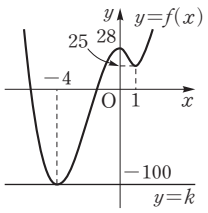
$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	−4	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−100	↗	28	↘	25	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나려면

$k=-100$ 답 -100



0554 $f(x)-k=0$에서 $f(x)=k$ …… ㉠

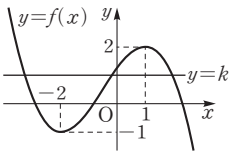
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	…	−2	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−1	↗	2	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $-1<k<2$ 답 $-1<k<2$



0555 $x^3-\frac{3}{2}x^2-a=0$에서 $x^3-\frac{3}{2}x^2=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 음근과 서로 다른 두 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 다른 두 개는 양수이어야 한다.

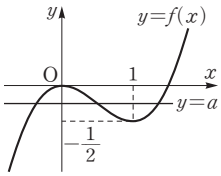
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 서로 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}<a<0$ 답 $-\frac{1}{2}<a<0$



0556 $2x^3-3x^2-12x+1-k=0$에서 $2x^3-3x^2-12x+1=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=2x^3-3x^2-12x+1$과 직선 k의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$로 놓으면

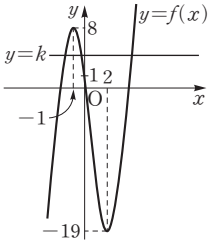
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-19	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 서로 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는

$1<k<8$ 답 ④



0557 $x^3-5x^2+7x=x^2-2x+a$에서

$x^3-6x^2+9x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 양수이어야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면

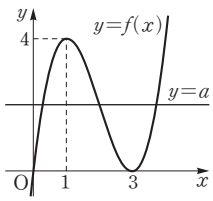
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $0<a<4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3으로 3개이다. 답 **3**



0558 $x^4-4x^3-2x^2+12x-k=0$에서

$x^4-4x^3-2x^2+12x=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

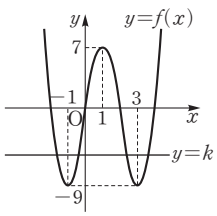
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 두 개는 양수, 서로 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는

$-9<k<0$

따라서 정수 k는 -8, -7, …, -1로 8개이다. 답 **8**



0559 $f(x)=x^3-3x^2+1-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(2)<0$, 즉 $(1-k)(-3-k)<0$에서

$(k-1)(k+3)<0$ $\therefore -3<k<1$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0이므로 3개이다. 답 **3**

0560 $f(x)=2x^3-3x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(0)f(1)>0$, 즉 $a(a-1)>0$에서

$a<0$ 또는 $a>1$ 답 $a<0$ 또는 $a>1$

0561 $f(x)=2x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$, 즉 $k(k-8)=0$에서 $k=0$ 또는 $k=8$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $0+8=8$ 답 **8**

0562 $x^3-2=12x+k$에서 $x^3-12x-2-k=0$

$f(x)=x^3-12x-2-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)>0$, 즉 $(14-k)(-18-k)>0$에서

$(k-14)(k+18)>0$ $\therefore k<-18$ 또는 $k>14$

따라서 $\alpha=-18$, $\beta=14$이므로 $\beta-\alpha=32$ 답 ⑤

0563 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-11x=x+k$, 즉 $x^3-12x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-12x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)<0$, 즉 $(16-k)(-16-k)<0$에서

$(k-16)(k+16)<0$

$\therefore -16<k<16$ 답 $-16<k<16$

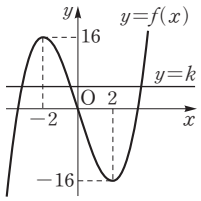
다른풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-12x=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉, 곡선 $y=x^3-12x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3-12x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $-16<k<16$

0564 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-5x^2+3x+k=-2x^2+3x$, 즉 $x^3-3x^2+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$, 즉 $k(k-4)=0$에서 $k=4$ ($\because k>0$) 답 4

0565 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3+2x^2-5x+k=-x^2+4x+2$, 즉 $x^3+3x^2-9x+k-2=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다. ㉮

$f(x)=x^3+3x^2-9x+k-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ ㉯

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-3)f(1)>0$, 즉 $(25+k)(k-7)>0$에서

$k<-25$ 또는 $k>7$ ㉰

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다. ㉱

답 8

단계	채점요소	배점
㉮	방정식이 오직 하나의 실근을 가져야 함을 알기	20%
㉯	$f'(x)=0$인 x의 값 구하기	30%
㉰	k의 값의 범위 구하기	40%
㉱	자연수 k의 최솟값 구하기	10%

0566 주어진 두 곡선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식 $-2x^3-x^2+6x+3=2x^2-6x+k$, 즉 $2x^3+3x^2-12x-3+k=0$이 중근과 한 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-3+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 한 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)=0$, 즉 $(k+17)(k-10)=0$에서

$k=-17$ 또는 $k=10$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-17+10=-7$ 답 -7

0567 (i) $a=0$일 때,

$x^4+48\ge0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a\neq0$일 때,

$f(x)=x^4-4a^3x+48$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4a^3=4(x-a)(x^2+ax+a^2)$

이때 $x^2+ax+a^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2\ge0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=a$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(a)=a^4-4a^4+48$

$=-3a^4+48$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(a)>0$이어야 하므로

$-3a^4+48>0$, $a^4-16<0$

$(a+2)(a-2)(a^2+4)<0$

$\therefore -2<a<0$ 또는 $0<a<2$ ($\because a\neq0$)

(i), (ii)에서 $-2<a<2$ 답 ③

0568 $x^4-4x+a^2>2ax(2-x)$에서

$x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2>0$

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

이때 $x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$ ($\because a>0$)이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(1)=1+2a-4(a+1)+a^2$

$=a^2-2a-3$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로

$a^2-2a-3>0$, $(a-3)(a+1)>0$

$\therefore a>3$ ($\because a>0$)

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

0569 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2-3x+k$로 놓으면

$f'(x)=x^3-3x^2+5x-3=(x-1)(x^2-2x+3)$

이때 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(1)=k-\frac{5}{4}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$k-\frac{5}{4}\ge0$ $\therefore k\ge\frac{5}{4}$ 답 $k\ge\frac{5}{4}$

0570 $3x^4+4a^3 \geq 4x^3+3a^4$에서

$3x^4-4x^3-3a^4+4a^3 \geq 0$

$f(x)=3x^4-4x^3-3a^4+4a^3$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-3a^4+4a^3-1$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이려면 $-3a^4+4a^3-1 \geq 0$

이때 $g(a)=-3a^4+4a^3-1$로 놓으면

$g'(a)=-12a^3+12a^2=-12a^2(a-1)$

$g'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	↗	-1	↗	0	↘

$g(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 0을 가지므로 $g(a) \geq 0$을 만족시키는 실수 a의 값은 1이다. 답 **1**

0571 $x^3+k>3x^2$에서 $x^3-3x^2+k>0$

$f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x>2$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(2, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>2$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(2) \geq 0$이어야 하므로

$8-12+k \geq 0$ $\therefore k \geq 4$

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다. 답 ②

0572 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$0<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<2$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(2) \geq 0$이어야 하므로

$8-6-12+k \geq 0$ $\therefore k \geq 10$ 답 $\boldsymbol{k \geq 10}$

0573 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=4x^3-x^2-2x-(2x^2+4x-k)=4x^3-3x^2-6x+k$

$h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$x \geq 2$일 때 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 반닫힌 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x \geq 2$일 때 $h(x) \geq 0$이려면 $h(2) \geq 0$이어야 하므로

$32-12-12+k \geq 0$ $\therefore k \geq -8$

따라서 실수 k의 최솟값은 -8이다. 답 -8

0574 $x^3-x^2-2x+1 \geq -x^2+x-k$에서 $x^3-3x+1+k \geq 0$

$f(x)=x^3-3x+1+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+1$	↘	$k-1$	↗	$k+3$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-1$이다.

즉, $f(x) \geq 0$이려면 $k-1 \geq 0$ $\therefore k \geq 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. 답 **1**

0575 $x^3-3x+2>6x+k$에서 $x^3-9x+2-k>0$

$f(x)=x^3-9x+2-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-6\sqrt{3}+2-k$	↗	

$0<x<2$일 때 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-6\sqrt{3}+2-k$이다.

즉, $f(x)>0$이려면 $-6\sqrt{3}+2-k>0$

$\therefore k<-6\sqrt{3}+2<-8$

따라서 정수 k의 최댓값은 -9이다. 답 ②

0576 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=5x^3-10x^2+k-(5x^2+2)=5x^3-15x^2+k-2$

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-22$	↗	

$0<x<3$일 때 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-22$이다.

즉, $h(x)>0$이려면 $k-22>0$ $\therefore k>22$ 답 $\boldsymbol{k>22}$

0577 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$일 때이므로

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 $t=3$일 때 마지막으로 원점을 통과한다.

점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $3\cdot 3^2-10\cdot 3+6=3$ 답 **3**

0578 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t-14$

속도 v가 10이므로 $3t^2-6t-14=10$에서

$3t^2-6t-24=0$, $3(t+2)(t-4)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$4^3-3\cdot4^2-14\cdot4=-40$ 답 ②

0579 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+6t+1$

속도 v가 25이므로 $3t^2+6t+1=25$에서

$3t^2+6t-24=0$, $3(t+4)(t-2)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=2$

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t+6$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot2+6=18$ 답 **18**

0580 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t^2+4t$, $v_Q=8t+30$ ㉮

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P=v_Q$이므로

$2t^2+4t=8t+30$, $t^2-2t-15=0$

$(t+3)(t-5)=0$ $\therefore t=5$ ($\because t>0$) ㉯

$x_P(5)=\frac{2}{3}\cdot5^3+2\cdot5^2-\frac{1}{3}=133$,

$x_Q(5)=4\cdot5^2+30\cdot5=250$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$250-133=117$ ㉰

답 **117**

단계	채점요소	배점
㉮	두 점 P, Q의 속도 구하기	40 %
㉯	속도가 같아지는 시각 구하기	30 %
㉰	두 점 P, Q 사이의 거리 구하기	30 %

0581 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+14t^2-8t-1$

$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+28t-8$

점 P의 속도가 증가하면 $a>0$이므로

$-12t^2+28t-8>0$, $(3t-1)(t-2)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<t<2$ 답 ②

0582 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-t^2+6t+16=-(t-3)^2+25$

$0\le t\le5$일 때, v는 시각 $t=3$에서 최댓값 25를 갖는다.

따라서 $M=25$, $a=3$이므로 $M-a=22$ 답 **22**

0583 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\frac{3}{4}t^2-3t-1=\frac{3}{4}(t-2)^2-4$

즉, $0\le t\le6$에서 $-4\le v\le8$이므로

$0\le|v|\le8$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 8이다. 답 **8**

0584 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_P(t)=x_Q(t)$일 때이므로

$2t^3+t^2=t^3+2t$, $t(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=1$ ($\because t>0$)

두 점 P, Q는 출발 후 시각 $t=1$에서 다시 만난다.

두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=\frac{dx_P}{dt}=6t^2+2t$, $v_Q(t)=\frac{dx_Q}{dt}=3t^2+2$에서

$v_P(1)=6+2=8$, $v_Q(1)=3+2=5$

따라서 $\alpha=8$, $\beta=5$이므로 $\alpha\beta=40$ 답 **40**

0585 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+10t-3=-(3t-1)(t-3)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

즉, 점 P는 시각 $t=\frac{1}{3}$에서 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=3$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=-6t+10$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$-6\cdot3+10=-8$ 답 **−8**

0586 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=8t-3$, $v_Q(t)=4t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_P(t)v_Q(t)<0$이므로

$(8t-3)(4t-8)<0$, $(8t-3)(t-2)<0$

$\therefore \frac{3}{8}<t<2$ 답 ②

0587 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$ ㉮

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

즉, 점 P는 시각 $t=2$에서 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다. ㉯

시각 $t=2$에서의 점 P의 위치 A는 $2^3-9\cdot2^2+24\cdot2=20$
시각 $t=4$에서의 점 P의 위치 B는 $4^3-9\cdot4^2+24\cdot4=16$
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $20-16=4$이다. ㉰

답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	점 P의 속도 구하기	30 %
㉯	운동 방향을 바꿀 때의 시각 구하기	20 %
㉰	두 점 A, B 사이의 거리 구하기	50 %

0588 자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=18-0.9t$
자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$18-0.9t=0 \quad \therefore t=20$
따라서 20초 동안 자동차가 움직인 거리는
$18\cdot20-0.45\cdot20^2=180(\text{m})$ 답 **180 m**

0589 열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=a-6t$
이때 열차가 제동을 건 지 2초 후에 정지하므로 $t=2$일 때의 속도가 0이다.
즉, $a-6\cdot2=0$에서 $a=12$ 답 **12**

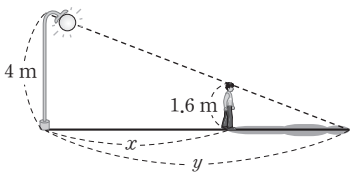
0590 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=9-3t^2$
기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$9-3t^2=0 \quad \therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$
이때까지 기차가 움직인 거리는
$9\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}(\text{m})$
따라서 목적지로부터 $6\sqrt{3}$ m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.
답 ④

0591 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$
최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$20-10t=0 \quad \therefore t=2$
따라서 2초 후 이 물체의 지면으로부터 높이는
$40+20\cdot2-5\cdot2^2=60(\text{m})$ 답 ②

0592 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$
최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$a-10t=0 \quad \therefore t=\frac{a}{10}$
즉, $t=\frac{a}{10}$일 때 물체의 높이가 최대이므로
$a\cdot\frac{a}{10}-5\cdot\left(\frac{a}{10}\right)^2\ge45,\ \frac{a^2}{20}\ge45$
$\therefore a\ge30\ (\because a>0)$
따라서 상수 a의 최솟값은 30이다. 답 **30**

0593 돌의 t초 후의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=40-10t$
ㄱ. $t=2$일 때, 속도 v는 $v=40-10\cdot2=20(\text{m/s})$
ㄴ. 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$40-10t=0 \quad \therefore t=4$
ㄷ. 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$에서
$45+40t-5t^2=0,\ t^2-8t-9=0$
$(t+1)(t-9)=0 \quad \therefore t=9\ (\because t>0)$
즉, 9초 후 돌이 지면에 떨어지는 순간의 속도는
$v=40-10\cdot9=-50(\text{m/s})$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0594 가로등 밑에서 사람까지의 거리를 x m, 그림자의 앞 끝까지의 거리를 y m라 하면



$4:1.6=y:(y-x)$
$1.6y=4(y-x) \quad \therefore y=\frac{5}{3}x$
그런데 $x=100t$이므로 $y=\frac{500}{3}t$
$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{500}{3}$
따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 $\frac{500}{3}$ m/min이다.
답 ③

0595 t초 후의 고무 풍선의 반지름의 길이가 $(4+t)$cm이므로 ㉮

고무 풍선의 부피를 $V\text{cm}^3$라 하면
$V=\frac{4}{3}\pi(4+t)^3=\frac{4}{3}\pi(t^3+12t^2+48t+64)$ ㉯

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi(3t^2+24t+48)$
$=4\pi(t+4)^2$ ㉰

따라서 $t=6$일 때 고무 풍선의 부피의 변화율은

$4\pi(6+4)^2=400\pi(\text{cm}^3/\text{s})$ ㉣

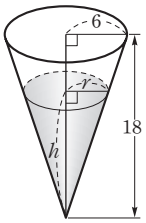
답 400π cm³/s

단계	채점요소	배점
㉮	t초 후의 풍선의 반지름의 길이 구하기	20 %
㉯	부피 V를 t에 대한 식으로 나타내기	20 %
㉰	$\frac{dV}{dt}$ 구하기	30 %
㉱	$t=6$일 때 부피의 변화율 구하기	30 %

0596 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면 $h=t$이므로 높이가 5 cm가 되는 시각은

$t=5$

또, 오른쪽 그림에서 $6:18=r:h$



$\therefore r=\frac{1}{3}h$

물의 부피를 V cm³라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}h\right)^2\cdot h$

$=\frac{1}{27}\pi h^3=\frac{1}{27}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{9}\pi t^2$

따라서 $t=5$일 때 물의 부피의 변화율은

$\frac{1}{9}\pi\cdot5^2=\frac{25}{9}\pi(\text{cm}^3/\text{s})$ **답 $\frac{25}{9}\pi$ cm³/s**

0597 t초 후의 맨 바깥쪽 파문의 반지름의 길이를 r m라 하면 원의 넓이는 $S=\pi r^2(\text{m}^2)$

이때 반지름의 길이의 일정한 증가율을 k라 하면

$r=kt \quad \therefore S=\pi(kt)^2=\pi k^2t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=2\pi k^2t$

$t=2$일 때의 파문의 넓이의 증가율은 $4\pi k^2=\pi$이므로 $k^2=\frac{1}{4}$

따라서 $t=3$일 때 파문의 넓이의 증가율은

$2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot3=\frac{3}{2}\pi(\text{m}^2/\text{s})$ **답 ②**

0598 점 P가 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 P$(3t, 0)$, Q$(0, 4(t-2))$이므로 △OPQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot3t\cdot4(t-2)=6t(t-2)=6t^2-12t \ (t>2)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=12t-12$

$t=5$일 때 삼각형의 넓이의 변화율은

$12\cdot5-12=48$ **답 48**

0599 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(t, 0)$, $(0, 2t)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{t}+\frac{y}{2t}=1$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=2x$의 교점 R의 좌표는

$\frac{x}{t}+\frac{2x}{2t}=1$에서 $x=\frac{t}{2}$, $y=t$

즉, R$\left(\frac{t}{2}, t\right)$이므로 $\overline{\text{OR}}=l$이라 하면

$l=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+t^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}t \quad \therefore \frac{dl}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이다. **답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$**

0600 비가 내리기 전 측정기의 각 모서리의 길이는 $10-5=5(\text{mm})$이고, 낮 12시부터 t시간이 지난 후의 측정기의 각 모서리의 길이는 $(5+5t)$ mm이므로 이때의 측정기의 부피를 V mm³라 하면

$V=(5+5t)^3=125(t^3+3t^2+3t+1)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=125(3t^2+6t+3)=375(t+1)^2$

측정기의 부피의 변화율이 13500 mm³/h가 되는 순간은

$375(t+1)^2=13500$에서

$(t+1)^2=36 \quad \therefore t=5 \ (\because t>0)$

따라서 강수량의 변화율이 13500 mm³/h가 되는 순간은 낮 12시부터 5시간이 지난 후인 오후 5시이다. **답 ②**

유형 up

본문 91쪽

0601 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=\frac{dv}{dt}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 시각 t에서의 $y=v(t)$의 그래프의 접선의 기울기와 같다. 이때

$a(t_1)<0$, $a(t_2)=0$, $a(t_3)>0$, $a(t_4)=0$, $a(t_5)<0$

이므로 시각 t_3에서의 가속도가 가장 크다. **답 ③**

0602 ㄱ. 시각 $t=5$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 시각 $t=5$에서 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄴ. 시각 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. 시각 $2<t<4$에서 수직선 위를 음의 방향으로 움직인다.

ㄹ. 시각 $4<t<5$에서 $y=v(t)$는 증가하는 함수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. **답 ㄷ**

0603 ㄱ. 시각 $t=a$에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄴ. 시각 $t=a$, $t=c$, $t=e$에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. 시각 $t=c$에서 속도는 0이다.

ㄹ. 시각 $t=a$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

0604 ㄱ. 시각 $t=a$에서 점 P의 속도는 0이므로 점 Q의 속도가 더 크다.

ㄴ. 점 P와 점 Q는 시각 $t=b$에서 위치가 같으므로 만난다.

ㄷ. $t=c$일 때, 두 곡선 $y=x_{\mathrm{P}}(t)$, $y=x_{\mathrm{Q}}(t)$ 위의 점에서의 접선의 기울기가 모두 음수이므로 두 점 P, Q는 서로 같은 방향으로 움직인다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

시험에 꼭 나오는 문제 본문 92~95쪽

0605 $\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2+k=0$에서

$\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2=-k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2$과 직선 $y=-k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^3-3x^2-6x=3x(x+1)(x-2)$

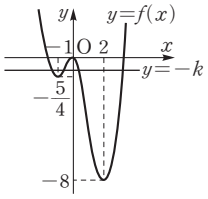
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	…	-1	…	0	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	0	↘	-8	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$-\frac{5}{4}<-k<0$ $\therefore 0<k<\frac{5}{4}$

따라서 실수 k의 값으로 적당한 것은 ②이다. 답 ②



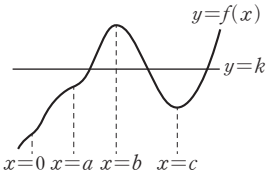
0606 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, a, b, c이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	…	0	…	a	…	b	…	c	…
$f'(x)$	+	0	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↗		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같으므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 3이다. 답 ③



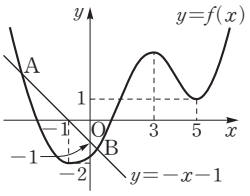
0607 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3, 5이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

x	…	-1	…	3	…	5	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗		↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)+x+1=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x-1$의 교점 A, B의 x좌표와 같으므로 1개의 양근과 1개의 음근을 갖는다. 답 ①



0608 $2x^3+3x^2-12x+a=0$에서

$-2x^3-3x^2+12x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 음근과 두 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=-2x^3-3x^2+12x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 다른 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$로 놓으면

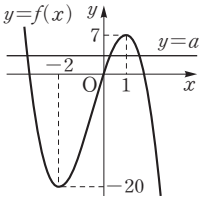
$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는

$0<a<7$ 답 $0<a<7$



0609 $f(x)=2x^3-3ax^2+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(0)f(a)=0$, 즉 $a(a-a^3)=0$에서

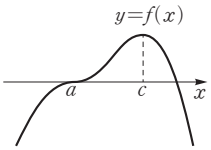
$a^2(a+1)(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 ①

0610 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, c이므로 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=c$

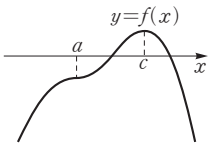
이때 $x=a$에서는 극값을 갖지 않고, $x=c$에서는 극값을 갖는다.

ㄱ. $f(a)=0$

즉, $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



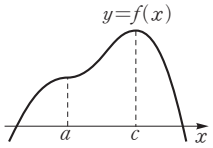
ㄴ. $f(a)f(c)<0$

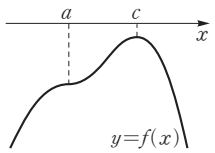


즉, $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(a)f(c)>0$

⇨ $f(a)>0$, $f(c)>0$ 또는 $f(a)<0$, $f(c)<0$





즉, $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖거나 실근을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0611 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-x=2x+k$, 즉 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)<0$, 즉 $(2-k)(-2-k)<0$에서

$(k+2)(k-2)<0$ $\therefore -2<k<2$ 답 ③

0612 $f(x)=x^3-3x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

점 $(0, a)$에서 곡선 $y=x^3-3x^2-2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-2)라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2-2)=(3t^2-6t)(x-t)$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$a-(t^3-3t^2-2)=(3t^2-6t)(-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2+2+a=0$ ····· ㉠

점 $(0, a)$에서 주어진 곡선에 오직 한 개의 접선만을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 오직 하나의 실근만을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-3t^2+2+a$로 놓으면 $f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(0)f(1)>0$이어야 하므로

$(a+2)(a+1)>0$ $\therefore a<-2$ 또는 $a>-1$ 답 ①

0613 $x^4-8x+a\geq 4x^3-6x^2$에서

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-8=4(x-2)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2-x+1>0$)

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(2)=a-8$

x	···	2	···
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면

$f(2)\geq 0$이어야 하므로

$a-8\geq 0$ $\therefore a\geq 8$

따라서 실수 a의 최솟값은 8이다. 답 ⑤

0614 $x^4-4x\geq -x^2+2x-a$에서 $x^4+x^2-6x+a\geq 0$

$h(x)=x^4+x^2-6x+a$로 놓으면

$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

이때 $2x^2+2x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(1)=a-4$

x	···	1	···
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이려면

$h(1)\geq 0$이어야 하므로

$a-4\geq 0$ $\therefore a\geq 4$ 답 $a\geq 4$

0615 $2x^3+k\geq 3x^2$에서 $2x^3-3x^2+k\geq 0$

$f(x)=2x^3-3x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=k-1$

x	0	···	1	···
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	k	↘	$k-1$	↗

따라서 $x\geq 0$일 때, $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

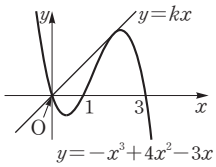
$k-1\geq 0$ $\therefore k\geq 1$ 답 $k\geq 1$

0616 $4x^2-3x<x^3+kx$에서 $-x^3+4x^2-3x<kx$

$f(x)=-x^3+4x^2-3x=-x(x-1)(x-3)$으로 놓으면

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$와 $x=t$에서 접하는 접선의 방정식

$y=(-3t^2+8t-3)(x-t)$

$+(-t^3+4t^2-3t)$

이 원점을 지나므로

$2t^3-4t^2=0$, $2t^2(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉, 접점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$

따라서 $4x^2-3x<x^3+kx$가 성립하려면 $k>1$이어야 한다.

답 ②

0617 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 $v_P(t)$, $v_Q(t)$는

$v_P(t)=t^2+4$, $v_Q(t)=4t$이므로

속도가 같아지는 시각은

$t^2+4=4t$에서 $t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$ $\therefore t=2$

따라서 두 점 P, Q의 시각 $t=2$에서의 위치는 각각

$x_P(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}+8-\frac{2}{3}=10$

$x_Q(2)=2\cdot 2^2-10=8-10=-2$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $10-(-2)=12$ 답 **12**

0618 시각 t에서의 중점 M의 위치를 x라 하면

$x=\frac{1}{2}\{(2t^3-2t^2+3t)+(-4t^2-t)\}=t^3-3t^2+t$

시각 t에서의 중점 M의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+1$

따라서 시각 $t=3$에서의 속도는

$3\cdot 3^2-6\cdot 3+1=10$ 답 ①

0619 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12$

운동 방향이 바뀌는 순간은 $v=0$이므로

$3t^2-12=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

이때 점 P가 원점에 위치하므로

$2^3-12\cdot 2+k=0$ $\therefore k=16$ 답 ④

0620 ㄱ. $x(1)=\frac{1}{3}-4+7=\frac{10}{3}$,

$x(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-4\cdot 3^2+7\cdot 3=-6$이므로 시각 $t=1$, $t=3$에서의 점 P의 위치는 같지 않다.

ㄴ. 시각 t에서의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+7$

따라서 시각 $t=0$에서의 속도는 7이다.

ㄷ. 시각 t에서의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=2t-8$

따라서 시각 $t=3$에서의 가속도는 $2\cdot 3-8=-2$

ㄹ. $v=0$에서 $t^2-8t+7=(t-1)(t-7)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=8$

따라서 점 P는 움직이는 동안 시각 $t=1$, $t=8$에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ③

0621 ㄱ. t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dh}{dt}=30-10t$

최고 높이에서 물체의 속력은 0이므로 $v=0$에서 $t=3$

따라서 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 3초이다.

ㄴ. 물체의 최고 높이는 $t=3$일 때의 높이이므로

$35+30\cdot 3-5\cdot 3^2=80$(m)

ㄷ. 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$35+30t-5t^2=0$, $t^2-6t-7=0$, $(t+1)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>0$)

따라서 걸리는 시간은 7초이다.

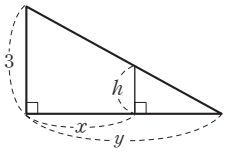
ㄹ. 물체의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=-10$으로 일정하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0622 가로등 밑에서 사람까지의 거리를 x m, 그림자의 앞 끝까지의 거리를 y m, 사람의 키를 h m라 하면

$x=60t$

오른쪽 그림에서



$y:(y-x)=3:h$

$3(y-x)=hy$

$(3-h)y=3x$

$y=\frac{3x}{3-h}$ $\therefore y=\frac{180}{3-h}t$

$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{180}{3-h}$

해성이의 키는 180 cm이므로

$v_1=\frac{180}{3-1.8}=\frac{180}{1.2}=150$(m/min)

유빈이의 키는 150 cm이므로

$v_2=\frac{180}{3-1.5}=120$(m/min)

$\therefore v_1:v_2=5:4$ 답 ③

0623 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+2t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t+2)^2=\sqrt{3}(t+1)^2=\sqrt{3}(t^2+2t+1)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=2\sqrt{3}(t+1)$

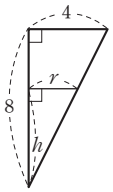
따라서 $t=5$일 때, 정삼각형의 넓이의 변화율은

$2\sqrt{3}(5+1)=12\sqrt{3}$(cm^2/s) 답 **$12\sqrt{3}$ cm^2/s**

0624 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면 $h=0.5t$이므로 높이가 4 cm가 되는 시각은

$4=0.5t$ $\therefore t=8$(초)

또, 오른쪽 그림에서 $4:8=r:h$



$\therefore r=\frac{1}{2}h$

t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2\cdot h$

$=\frac{\pi}{12}h^3=\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{2}t\right)^3$

$=\frac{\pi}{96}t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{32}t^2$

따라서 $t=8$일 때 물의 부피의 변화율은

$\frac{\pi}{32}\cdot 8^2=2\pi$(cm^3/s) 답 ①

0625 ㄱ. 출발 후 2초까지 점 P는 양의 방향으로 이동했으므로 위치는 원점이 아니다.

ㄴ. $t=2$에서 점 P의 속도는 0이고 양의 방향에서 음의 방향으로 움직이는 방향이 바뀐다.

ㄷ. $t=2$, $t=5$에서 $v=0$이고, $t=2$, $t=5$의 양 옆으로 속도의 부호가 바뀌므로 운동 방향이 2번 바뀐다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0626 $x^3-3x^2-k=0$에서 $x^3-3x^2=k$ …… ㉠

방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수를 구하려면 곡선 $y=x^3-3x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수를 구하면 된다.

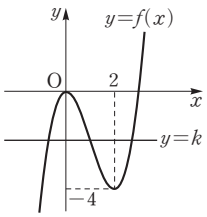
$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ㉮

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값 -4를 갖는다.



㉯

이때 $-4<k<0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ㉰

답 **3**

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)=0$인 x의 값 구하기	20 %
㉯	$y=f(x)$의 그래프 그리기	40 %
㉰	방정식의 서로 다른 실근의 개수 구하기	40 %

0627 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=2x^3-3x^2-(x^3-a)=x^3-3x^2+a$에서

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1<x<3$) ㉮

x	(1)	…	2	…	(3)
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$		↘	극소	↗	

$1<x<3$에서 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(2)=2^3-3\cdot2^2+a=a-4$ ㉯

$1<x<3$에서 $h(x)\geq0$이려면 $h(2)\geq0$이어야 하므로

$a-4\geq0$ $\therefore a\geq4$

따라서 상수 a의 최솟값은 4이다. ㉰

답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	$h'(x)=0$인 x의 값 구하기	30 %
㉯	$h(x)$의 최솟값 구하기	40 %
㉰	a의 최솟값 구하기	30 %

0628 시각 t에서 두 점 P, Q의 속도는

$v_P(t)=2t-6$, $v_Q(t)=t+4$ ㉮

두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이려면

$v_P(t)v_Q(t)>0$ ㉯

즉, $(2t-6)(t+4)>0$에서 $t>3$ ($\because t>0$) ㉰

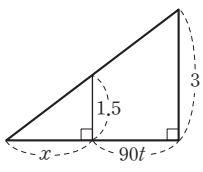
답 $t>3$

단계	채점요소	배점
㉮	두 점 P, Q의 속도 구하기	40 %
㉯	같은 방향으로 움직일 때의 조건 알기	40 %
㉰	t의 값의 범위 구하기	20 %

0629 t분 동안 사람이 움직인 거리는 $90t$ m이고 시각 t분에서 그림자의 길이를 x m라 하면

오른쪽 그림에서

$3:1.5=(x+90t):x$ ㉮



$1.5(x+90t)=3x$

$\therefore x=90t$ ㉯

$\therefore \dfrac{dx}{dt}=90$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 90 m/min이다. ㉰

답 **90 m/min**

단계	채점요소	배점
㉮	비례식 세우기	40 %
㉯	x를 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉰	그림자의 길이의 변화율 구하기	20 %

0630 (i) $x\geq a$일 때, $g(x)=x-a$

$h(x)=6x^3-x-(x-a)=6x^3-2x+a$라 하면

$h'(x)=18x^2-2=2(3x+1)(3x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$h\left(-\frac{1}{3}\right)h\left(\frac{1}{3}\right)=0$이어야 하므로

$\left(-\frac{6}{27}+\frac{2}{3}+a\right)\left(\frac{6}{27}-\frac{2}{3}+a\right)=0$, $\left(a+\frac{4}{9}\right)\left(a-\frac{4}{9}\right)=0$

$\therefore a=-\frac{4}{9}$ 또는 $a=\frac{4}{9}$

이때 $x\geq a$이므로 $a=-\frac{4}{9}$

(ii) $x<a$일 때, $g(x)=-x+a$

$h(x)=6x^3-x-(-x+a)=6x^3-a$라 하면

$h'(x)=18x^2$

$h'(x)=0$에서 $x=0$

$h(x)=0$은 오직 한 개의 근만 갖는다.

(i), (ii)에서 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값은 $-\frac{4}{9}$이다. 답 ④

0631 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}=1$, $\angle OBA=30^\circ$이므로

$\overline{OB}=2$

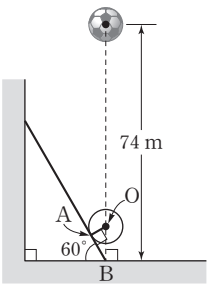
따라서 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 공의 중심의 높이는 2이므로

$h(t)=74-8t^2=2$, $8t^2=72$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

이때 $v(t)=h'(t)=-16t$이므로

$v(3)=-48$(m/s) 답 -48 m/s



0632 선분 OQ가 밑면의 반지름의 길이 t이고,

선분 PQ의 높이는 $f(t)=-t^2-4t$이므로

만들 수 있는 원뿔의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=\frac{1}{3}\pi t^2\cdot(-t^2-4t)=-\frac{1}{3}\pi t^3(t+4)$

$V'(t)=-\frac{1}{3}\pi(4t^3+12t^2)=-\frac{4}{3}\pi t^2(t+3)$

$V'(t)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=0$

t	⋯	-3	⋯	0	⋯
$V'(t)$	+	0	−	0	−
$V(t)$	↗	극대	↘		↘

따라서 $t=-3$일 때 원뿔의 부피가 최대가 되므로

$V(-3)=-\frac{1}{3}\pi\cdot(-3)^3\cdot(-3+4)=9\pi$ 답 9π

07 부정적분

교과서 문제 정복하기

본문 99쪽

0633 $f(x)=(3x^2+4x+C)'=6x+4$ 답 $f(x)=6x+4$

0634 $f(x)=(x^3-x^2+C)'=3x^2-2x$ 답 $f(x)=3x^2-2x$

0635 $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C\right)'$

$=x^3+x^2+x$ 답 $f(x)=x^3+x^2+x$

0636 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\left(\int x^2dx\right)=x^2$ 답 x^2

0637 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left(\frac{d}{dx}x^2\right)dx=x^2+C$ 답 x^2+C

0638 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^3+2x)dx\right\}=x^3+2x$ 답 x^3+2x

0639 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x)\right\}dx=x^3+2x+C$ 답 x^3+2x+C

0640 $\int dx=\int 1\,dx=x+C$ 답 $x+C$

0641 $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$ 답 $\frac{1}{4}x^4+C$

0642 $\int x^{21}dx=\frac{1}{22}x^{22}+C$ 답 $\frac{1}{22}x^{22}+C$

0643 $\int x^{n-1}dx=\frac{1}{n}x^n+C$ 답 $\frac{1}{n}x^n+C$

0644 $\int(3x-4)dx=\int 3x\,dx-\int 4\,dx$

$=3\int x\,dx-\int 4\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2-4x+C$ 답 $\frac{3}{2}x^2-4x+C$

0645 $\int(5x^2-2x+1)dx=\int 5x^2dx-\int 2x\,dx+\int dx$

$=5\int x^2dx-2\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{5}{3}x^3-x^2+x+C$

답 $\frac{5}{3}x^3-x^2+x+C$

0646 $\int(x-1)(x+2)dx=\int(x^2+x-2)dx$

$=\int x^2dx+\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

0647 $\int(2x-3)^2dx=\int(4x^2-12x+9)dx$

$=\int 4x^2dx-\int 12x\,dx+\int 9\,dx$

$=4\int x^2dx-12\int x\,dx+\int 9\,dx$

$=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$

답 $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$

0648 $\int(x-3)(x^2+3x+9)dx=\int(x^3-27)dx$

$=\int x^3dx-\int 27dx$

$=\frac{1}{4}x^4-27x+C$

답 $\frac{1}{4}x^4-27x+C$

0649 $\int\frac{x^2-4}{x+2}dx=\int(x-2)dx=\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+C$ 답 $\frac{1}{2}x^2-2x+C$

0650 $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx=\int(x^2-x+1)dx$

$=\int x^2dx-\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

0651 $\int(x+1)^2dx-\int(x-1)^2dx$

$=\int(x^2+2x+1)dx-\int(x^2-2x+1)dx$

$=\int 4x\,dx=4\int x\,dx$

$=2x^2+C$ 답 $2x^2+C$

0652 $\int\frac{x^3}{x-2}dx-\int\frac{8}{x-2}dx$

$=\int\frac{x^3-8}{x-2}dx=\int(x^2+2x+4)dx$

$=\int x^2dx+\int 2x\,dx+\int 4\,dx$

$=\int x^2dx+2\int x\,dx+\int 4\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$ 답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

유형 익히기 본문 100~105쪽

0653 $(x-3)f(x)=(x^3-27x)'=3x^2-27$

$=3(x+3)(x-3)$

따라서 $f(x)=3(x+3)$이므로

$f(-1)=3\cdot 2=6$ 답 ④

0654 $F(x)=x^3+x^2+1$로 놓으면

$f(x)=F'(x)=3x^2+2x$ 답 ②

0655 $F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=4x(4x+3)+(2x^2-1)\cdot 4$

$=24x^2+12x-4$

$\therefore F(0)=-4$ 답 -4

0656 $f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+2$이므로

$f(0)=2=b$ ..... ㉮

$f'(x)=6x+2a$이므로

$f'(0)=2a=3$ $\therefore a=\frac{3}{2}$ ..... ㉯

$\therefore ab=\frac{3}{2}\cdot 2=3$ ..... ㉰

답 3

단계	채점요소	배점
㉮	b의 값 구하기	40 %
㉯	a의 값 구하기	40 %
㉰	ab의 값 구하기	20 %

0657 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+2x^2+bx-7)dx\right\}=ax^3+2x^2+bx-7$

이므로 $ax^3+2x^2+bx-7=x^3+cx^2+3x+d$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1,\ b=3,\ c=2,\ d=-7$

$\therefore\ a+b+c+d=-1$ 답 ③

0658 $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$이므로

$xf(x)=x^4+x^3+x^2+x=x(x^3+x^2+x+1)$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x+1$이므로

$f(3)=27+9+3+1=40$ 답 **40**

0659 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x)\right\}dx=x^3-2x+C$

$F(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $F(x)=x^3-2x+2$이므로

$F(2)=8-4+2=6$ 답 **6**

0660 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C_1$이므로

$f(x)+C_1=x^3-6x+C$

$\therefore\ f(x)=x^3-6x+C-C_1$

$f(3)=10$이므로 $27-18+C-C_1=10$ $\therefore\ C-C_1=1$

따라서 $f(x)=x^3-6x+1$이므로

$f(-1)=-1+6+1=6$ 답 ⑤

0661 $F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)=2x^2+x$

$G(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}xf(x)\right\}dx=xf(x)+C=2x^2+x+C$

$G(1)=5$이므로 $2+1+C=5$ $\therefore\ C=2$

따라서 $F(x)=2x^2+x$, $G(x)=2x^2+x+2$이므로

$F(-1)+G(-1)=1+3=4$ 답 **4**

0662 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$

$=(x-2)^2+C-4$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로

$C-4=-8$ $\therefore\ C=-4$

따라서 $f(x)=x^2-4x-4$이므로

$f(5)=25-20-4=1$ 답 **1**

0663 $F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$

$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C_2$

$=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+C_2$

$F(0)=-5$이므로 $C_2=-5$

따라서 $F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x-5$이므로

$F(1)=10+9+\cdots+2+1-5=50$ 답 ③

0664 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2dx$

$\therefore\ f(x)g(x)=x^3+C$

$f(2)=0,\ g(2)=12$이므로

$f(2)g(2)=8+C=0$ $\therefore\ C=-8$

즉, $f(x)g(x)=x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$이므로

$\begin{cases}f(x)=x-2\\g(x)=x^2+2x+4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2+2x+4\\g(x)=x-2\end{cases}$

그런데 $f(2)=0,\ g(2)=12$이므로

$f(x)=x-2,\ g(x)=x^2+2x+4$

$\therefore\ f(0)+g(1)=-2+7=5$ 답 **5**

0665 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 4\,dx$

$\therefore\ f(x)+g(x)=4x+C_1$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int 4x\,dx$

$\therefore\ f(x)-g(x)=2x^2+C_2$

$f(0)=3,\ g(0)=-4$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=-1,\ f(0)-g(0)=C_2=7$

즉, $f(x)+g(x)=4x-1$, $f(x)-g(x)=2x^2+7$이므로

$f(x)=x^2+2x+3,\ g(x)=-x^2+2x-4$

$\therefore\ f(1)+g(-1)=6+(-7)=-1$ 답 **−1**

0666 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x+2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(4x+2)dx$

$\therefore\ f(x)+g(x)=2x^2+2x+C_1$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=12x^2+4x+4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(12x^2+4x+4)dx$

$\therefore\ f(x)g(x)=4x^3+2x^2+4x+C_2$

$f(0)=2$, $g(0)=1$이므로
$f(0)+g(0)=C_1=3$, $f(0)g(0)=C_2=2$
즉, $f(x)+g(x)=2x^2+2x+3=(2x^2+2)+(2x+1)$,
$f(x)g(x)=4x^3+2x^2+4x+2=(2x^2+2)(2x+1)$이므로
$\begin{cases} f(x)=2x^2+2 \\ g(x)=2x+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=2x^2+2 \end{cases}$
그런데 $f(0)=2$, $g(0)=1$이므로
$f(x)=2x^2+2$, $g(x)=2x+1$
$\therefore f(1)-g(2)=4-5=-1$ 답 -1

0667 $f(x)=\int\frac{x^2}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$
$=\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx$
$=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$
$f(0)=1$이므로 $C=1$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로
$f(2)=2+2+1=5$ 답 5

0668 $f(x)=\int(1-x)^3dx-\int(1+x)^3dx$
$=\int(1-3x+3x^2-x^3)dx$
$-\int(1+3x+3x^2+x^3)dx$
$=\int(-2x^3-6x)dx$
$=-\frac{1}{2}x^4-3x^2+C$
$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $C=\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{1}{2}$이므로
$f(1)=-\frac{1}{2}-3+\frac{1}{2}=-3$ 답 -3

0669 $\int\frac{9}{x}dx+\int\frac{(2x+3)(2x-3)}{x}dx$
$=\int\frac{9}{x}dx+\int\frac{4x^2-9}{x}dx=\int\frac{9}{x}dx+\int\left(4x-\frac{9}{x}\right)dx$
$=\int4x\,dx=2x^2+C$
따라서 $a=2$, $b=0$이므로 $a+b=2$ 답 ②

0670 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)dx$
$=x+x^2+x^3+\cdots+x^9+C$
$f(1)=10$이므로 $9+C=10$ $\therefore C=1$
따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9$이므로
$f(-1)=1-1+1-1+\cdots-1=0$ 답 0

0671 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax+1)dx$
$=x^3+ax^2+x+C$
$f(0)=1$, $f(1)=2$이므로
$f(0)=C=1$
$f(1)=1+a+1+1=2$ $\therefore a=-1$
따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+1$이므로
$f(2)=8-4+2+1=7$ 답 7

0672 $f'(x)=3x^2-1$이므로
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-1)dx$
$=x^3-x+C$
$f(0)=2$이므로 $C=2$
따라서 $f(x)=x^3-x+2$이므로
$f(1)=1-1+2=2$ 답 2

0673 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}dx$
$=\int\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9}dx$
$=\int(x-3)dx=\frac{1}{2}x^2-3x+C$
$f(0)=1$이므로 $C=1$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+1$이므로
$f(-2)=2+6+1=9$ 답 9

0674 조건 (나)에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다. 즉, $f(1)=0$이므로
$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2+a$
즉, $a+2=2a-1$이므로 $a=3$
$\therefore f(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$
$f(1)=0$이므로 $1+3+C=0$ $\therefore C=-4$
따라서 $f(x)=x^2+3x-4$이므로
$a+f(2)=3+(4+6-4)=9$ 답 9

0675 $F(x)=xf(x)+2x^3-x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-2x$
$xf'(x)=-6x^2+2x$ $\therefore f'(x)=-6x+2$
$\therefore f(x)=\int(-6x+2)dx=-3x^2+2x+C$
$f(1)=2$이므로 $-3+2+C=2$ $\therefore C=3$
$\therefore f(x)=-3x^2+2x+3$ 답 ②

0676 $\int f(x)dx=xf(x)-2x^3+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+6x$

$xf'(x)=6x^2-6x$ $\therefore f'(x)=6x-6$

$\therefore f(x)=\int(6x-6)dx=3x^2-6x+C$

$f(1)=3$이므로 $3-6+C=3$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+6$이므로

$f(-1)=3+6+6=15$ 답 **15**

0677 $(x-1)f(x)-F(x)=4x^3-6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=12x^2-12x$

$(x-1)f'(x)=12x(x-1)$ $\therefore f'(x)=12x$

..... ㉮

$\therefore f(x)=\int 12x\,dx=6x^2+C$

$f(1)=2$이므로 $6+C=2$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=6x^2-4$이므로

..... ㉯

$f(-2)=24-4=20$

..... ㉰

답 **20**

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)$ 구하기	40%
㉯	$f(x)$ 구하기	40%
㉰	$f(-2)$의 값 구하기	20%

0678 $\int(x-2)f(x)dx+2F(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-2)f(x)+2f(x)=-2x^3+8x^2+2x$

$xf(x)=-2x^3+8x^2+2x$

$\therefore f(x)=-2x^2+8x+2=-2(x-2)^2+10$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 10을 가지므로

$a=2$, $M=10$ $\therefore aM=20$ 답 **20**

0679 $f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=x^3+2x^2-5x+2$ ..... ㉠

$f(x)$를 n차함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차함수이므로

$n+1=3$ $\therefore n=2$

즉, $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=x^3+2x^2-5x+2$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=x^3+2x^2-5x+2$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $b=2$, $2a+c=-5$ $\therefore a=1$, $b=2$, $c=-7$

따라서 $f(x)=x^2+2x-7$이므로

$f(3)=9+6-7=8$ 답 ④

0680 $3\int f(x)dx=xf(x)-2f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f(x)=f(x)+xf'(x)-2f'(x)$

$\therefore 2f(x)=(x-2)f'(x)$ ..... ㉠

$f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$인 상수, n은 자연수)이라 하면

$2f(x)$의 최고차항은 $2ax^n$, $(x-2)f'(x)$의 최고차항은 anx^n이므로

$2a=an$, $a(n-2)=0$ $\therefore n=2$ ($\because a\neq0$)

즉, $f(x)$가 이차함수이고 $f(0)=2$이므로 $f(x)=ax^2+bx+2$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+2$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2(ax^2+bx+2)=(x-2)(2ax+b)$

$\therefore 2ax^2+2bx+4=2ax^2+(b-4a)x-2b$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2b=b-4a$, $4=-2b$ $\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$이므로

$f(4)=8-8+2=2$ 답 ②

0681 $f'(x)=\begin{cases}2x+4 & (x\geq0)\\ -x^2+4 & (x<0)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+C_1 & (x\geq0)\\ -\frac{1}{3}x^3+4x+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$f(2)=6$이므로 $4+8+C_1=6$ $\therefore C_1=-6$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\left(-\frac{1}{3}x^3+4x+C_2\right)=f(0)$ $\therefore C_2=C_1=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-6 & (x\geq0)\\ -\frac{1}{3}x^3+4x-6 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-3)=9-12-6=-9$ 답 **−9**

0682 $f'(x)=\begin{cases}2x+2 & (x\geq1)\\ 3x^2+1 & (x<1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+C_1 & (x\geq1)\\ x^3+x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}(x^3+x+C_2)=f(1)$

$1+1+C_2=1+2+C_1$ $\therefore C_2-C_1=1$

$\therefore f(0)-f(2)=C_2-(4+4+C_1)=(C_2-C_1)-8$
$=1-8=-7$ 답 -7

0683 $f'(x)=x^2-|x|$에서
$f'(x)=\begin{cases}x^2-x & (x\geq 0)\\ x^2+x & (x<0)\end{cases}$
$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\geq 0)\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$
$f(1)=0$이므로 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C_1=0$ $\therefore C_1=\frac{1}{6}$
$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_2\right)=f(0)$ $\therefore C_2=\frac{1}{6}$
따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6} & (x\geq 0)\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6} & (x<0)\end{cases}$ 이므로
$f(-2)+f(2)=\left(-\frac{8}{3}+2+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{8}{3}-2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0684 $f'(x)=\begin{cases}2x+k & (x>1)\\ 6 & (x<1)\end{cases}$에서
$f(x)=\begin{cases}x^2+kx+C_1 & (x\geq 1)\\ 6x+C_2 & (x<1)\end{cases}$
$f(0)=-2$이므로 $C_2=-2$
$f(2)=6$이므로 $4+2k+C_1=6$ $\therefore 2k+C_1=2$ …… ㉠
$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1+}(x^2+kx+C_1)=\lim_{x\to 1-}(6x-2)$
$1+k+C_1=4$ $\therefore k+C_1=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=-1$, $C_1=4$
따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+4 & (x\geq 1)\\ 6x-2 & (x<1)\end{cases}$이므로
$k+f(1)=-1+4=3$ 답 3

0685 $f'(x)=3x^2+5$이므로
$f(x)=\int(3x^2+5)dx=x^3+5x+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$f(0)=C=3$
따라서 $f(x)=x^3+5x+3$이므로
$f(1)=1+5+3=9$ 답 ⑤

0686 $f'(x)=-4x+2$이므로
$f(x)=\int(-4x+2)dx=-2x^2+2x+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$f(1)=C=2$
따라서 $f(x)=-2x^2+2x+2$이므로
$k=f(2)=-8+4+2=-2$ 답 -2

0687 $f'(x)=4x+6$이므로
$f(x)=\int(4x+6)dx=2x^2+6x+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로
$f(1)=2+6+C=3$ $\therefore C=-5$
$\therefore f(x)=2x^2+6x-5$
따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+6x-5=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{5}{2}$이다. 답 $-\frac{5}{2}$

0688 $f(x)=\int(kx^2-4x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=kx^2-4x+4$ ……
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 6이므로
$f'(1)=k=6$ ……
$\therefore f(x)=\int(6x^2-4x+4)dx=2x^3-2x^2+4x+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$f(1)=2-2+4+C=2$ $\therefore C=-2$
따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+4x-2$이므로 ……
$f(2)=16-8+8-2=14$ ……

답 14

단계	채점요소	배점
가	$f'(x)$ 구하기	20%
나	k의 값 구하기	30%
다	$f(x)$ 구하기	40%
라	$f(2)$의 값 구하기	10%

0689 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2-h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(-2+h)-f(-2)\}-\{f(-2-h)-f(-2)\}}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}$
$=f'(-2)+f'(-2)$
$=2f'(-2)$
$f(x)=\int(x^3-2x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=x^3-2x+2$
$\therefore f'(-2)=-8+4+2=-2$
따라서 구하는 값은
$2f'(-2)=2\cdot(-2)=-4$ 답 -4

0690 $\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$
$=f'(-2)=4$

$f(x)=\int(x^2-2x+k)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x+k$

$f'(-2)=4$이므로 $4+4+k=4$ $\therefore k=-4$

$f(x)=\int(x^2-2x-4)dx=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-4x+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-4x+3$이므로

$f(3)=9-9-12+3=-9$ 답 ①

0691 조건 (나)에서 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$이므로 모든 실수 a에 대하여 $f'(a)=6a^2-4a-5$가 성립한다.

즉, $f'(x)=6x^2-4x-5$이므로

$f(x)=\int(6x^2-4x-5)dx=2x^3-2x^2-5x+C$

조건 (가)에서 $f(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=2x^3-2x^2-5x+4$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^3-2x^2-5x+4=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{4}{2}=-2$이다. 답 -2

0692 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

$f'(0)=4$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=4$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}-2x$

$=-2x+4$

$\therefore f(x)=\int(-2x+4)dx=-x^2+4x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-x^2+4x$이므로

$f(3)=-9+12=3$ 답 3

0693 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+1$ $\therefore f(0)=-1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+xh+1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)+1}{h}+x$

$=x+2$ ($\because$ (가))

$\therefore f(x)=\int(x+2)dx=\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x-1$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{2}+2-1=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

0694 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2-3$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+0-3$ $\therefore f(0)=3$

$f'(0)=3$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-3}{h}=3$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-3-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-3}{h}+x^2$

$=x^2+3$

$\therefore f(x)=\int(x^2+3)dx=\dfrac{1}{3}x^3+3x+C$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x+3$ 답 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x+3$

유형 up

본문 106쪽

0695 $f'(x)=kx(x+2)$ $(k<0)$로 놓으면

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int kx(x+2)dx=\int(kx^2+2kx)dx$

$=\dfrac{k}{3}x^3+kx^2+C$

이고 $f(-2)=-1$, $f(0)=3$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}k+4k+C=\frac{4}{3}k+C=-1$

$f(0)=C=3$

$\therefore k=-3,\ C=3$

따라서 $f(x)=-x^3-3x^2+3$이므로

$a=-1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$

$\therefore a+d=2$ 답 ⑤

0696 $f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int(x^2+2x-8)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+C$

이고 $f(2)=-8$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}+4-16+C=-8 \quad \therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+\frac{4}{3}$이므로 극댓값은

$f(-4)=-\frac{64}{3}+16+32+\frac{4}{3}=28$ 답 28

0697 $f'(x)=x(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int x(x-4)dx=\int(x^2-4x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$

이므로 $f(0)=C,\ f(4)=\frac{64}{3}-32+C=C-\frac{32}{3}$

극댓값이 극솟값의 3배이므로

$C=3\left(C-\frac{32}{3}\right) \quad \therefore C=16$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+16$이므로

$f(3)=9-18+16=7$ 답 ④

0698 삼차함수 $f(x)$의 최고차항이 $2x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $6x^2$이다. 또, $f'(-1)=f'(3)=0$이므로

$f'(x)=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int 6(x+1)(x-3)dx=\int(6x^2-12x-18)dx$

$=2x^3-6x^2-18x+C$

이고 $f(-1)=24$이므로

$f(-1)=-2-6+18+C=24 \quad \therefore C=14$

따라서 $f(x)=2x^3-6x^2-18x+14$이므로 극솟값은

$f(3)=54-54-54+14=-40$ 답 -40

0699 $f'(x)=(x+1)(3x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int(x+1)(3x-1)dx=\int(3x^2+2x-1)dx$

$=x^3+x^2-x+C$

이므로

$f(-1)=-1+1+1+C=C+1$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+C=C-\frac{5}{27}$

$y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면

(극댓값)$=0$ 또는 (극솟값)$=0$이므로

$C+1=0$ 또는 $C-\frac{5}{27}=0 \quad \therefore C=-1$ 또는 $C=\frac{5}{27}$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-x-1$ 또는 $f(x)=x^3+x^2-x+\frac{5}{27}$

답 $\boldsymbol{f(x)=x^3+x^2-x-1}$

또는 $\boldsymbol{f(x)=x^3+x^2-x+\frac{5}{27}}$

0700 $f'(x)=k(x+1)(x-1)\ (k>0)$로 놓으면

$f'(0)=-2$에서 $-k=-2 \quad \therefore k=2$

$\therefore f'(x)=2(x+1)(x-1)=2x^2-2$

이때

$f(x)=\int(2x^2-2)dx=\frac{2}{3}x^3-2x+C$

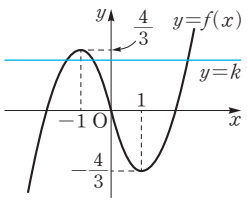
이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x$

한편, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$, 극솟값은 $f(1)=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3}$ 답 $\boldsymbol{-\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3}}$

시험에 꼭 나오는 문제 본문 107~109쪽

0701 $xf(x)=\left(\frac{5}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+C\right)'=\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x$

따라서 $f(x)=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0702 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(3x^3-ax^2)\right\}dx=3x^3-ax^2+C$ … ㉠

$f(1)=6$이므로 $3-a+C=6$ $\therefore a-C=-3$ …… ㉡

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=9x^2-2ax$

이때 $f'(1)=-1$이므로 $9-2a=-1$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면 $C=8$이므로

$f(x)=3x^3-5x^2+8$

$\therefore f(2)=24-20+8=12$ 답 **12**

0703 $f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=8+4+1=13$ 답 ④

0704 $f(x)=\int x^{20}dx+2\int(x^6-x)dx$

$=\int(x^{20}+2x^6-2x)dx$

$=\frac{1}{21}x^{21}+\frac{2}{7}x^7-x^2+C$

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $C=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{21}x^{21}+\frac{2}{7}x^7-x^2+\frac{2}{3}$이므로

$f(1)=\frac{1}{21}+\frac{2}{7}-1+\frac{2}{3}=0$ 답 **0**

0705 $f'(x)=12x^2+4x-2$이므로

$f(x)=\int(12x^2+4x-2)dx=4x^3+2x^2-2x+C$

$f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=4+2-2+C=0$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=4x^3+2x^2-2x-4$이므로

$f(-1)=-4+2+2-4=-4$ 답 ①

0706 $\int g(x)dx=x^3f(x)+x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)+1$

$\therefore g(2)=12f(2)+8f'(2)+1$

$=12-8+1=5$ 답 ⑤

0707 $\int(3x+2)f'(x)dx=x^3-2x^2-4x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(3x+2)f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=x-2$

$\therefore f(x)=\int(x-2)dx=\frac{1}{2}x^2-2x+C_1$

이때 함수 $f(x)$의 그래프의 y절편이 1이므로 $C_1=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$이므로 $f(x)$의 모든 계수의 합은

$\frac{1}{2}-2+1=-\frac{1}{2}$ 답 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

0708 $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\geq1)\\ -3x^2+4x & (x<1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x\geq1)\\ -x^3+2x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_2=1$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}(-x^3+2x^2+1)=f(1)$

$-1+2+1=1-1+C_1$ $\therefore C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2 & (x\geq1)\\ -x^3+2x^2+1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=4-2+2=4$ 답 **4**

0709 $f'(x)=\begin{cases}2 & (x\geq1)\\ 2x & (x<1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}2x+C_1 & (x\geq1)\\ x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로
$f(0)=C_2=0$
$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-} x^2=f(1)$
$1=2+C_1$ $\therefore C_1=-1$
따라서 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\geq1)\\ x^2 & (x<1)\end{cases}$이므로
$f(4)=8-1=7$ 답 7

0710 $f'(x)=3x^2-12$이므로
$f(x)=\int(3x^2-12)dx=x^3-12x+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 4)$를 지나므로
$f(0)=C=4$
따라서 $f(x)=x^3-12x+4$이므로
$f(2)=8-24+4=-12$ 답 −12

0711 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로 $f'(x)=ax^2$ $(a\neq0)$으로 놓으면
$f(x)=\int ax^2dx=\frac{a}{3}x^3+C$
곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1, 3)$, $(-1, 1)$을 지나므로
$f(1)=\frac{a}{3}+C=3$, $f(-1)=-\frac{a}{3}+C=1$
$\therefore a=3$, $C=2$
따라서 $f(x)=x^3+2$이므로
$f(3)=27+2=29$ 답 29

0712 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+3h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot3+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$
$=3f'(x)+f'(x)$
$=4f'(x)$
즉, $4f'(x)=12x^2+8x-8$에서
$f'(x)=3x^2+2x-2$
$\therefore f(x)=\int(3x^2+2x-2)dx=x^3+x^2-2x+C$
$f(1)=3$이므로 $1+1-2+C=3$ $\therefore C=3$
따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x+3$이므로
$f(-1)=-1+1+2+3=5$ 답 5

0713 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$
$=\frac{1}{3}f'(1)$

$f(x)=\int(5x^3-x^2+4x+7)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=5x^3-x^2+4x+7$ $\therefore f'(1)=5-1+4+7=15$
따라서 구하는 값은 $\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}\cdot15=5$ 답 ⑤

0714 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$로 놓으면
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때
$f(x)=\int ax(x-2)dx=\int(ax^2-2ax)dx$
$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$
이고 $f(0)=4$, $f(2)=-4$이므로
$f(0)=C=4$
$f(2)=\frac{8}{3}a-4a+C=-\frac{4}{3}a+4=-4$
$\therefore a=6$, $C=4$
따라서 $f(x)=2x^3-6x^2+4$이므로
$f(1)=2-6+4=0$ 답 ①

0715 $f(x)=\int(6x^2+ax-12)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=6x^2+ax-12$
$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 3을 가지므로
$f'(1)=0$, $f(1)=3$
$f'(1)=0$에서 $6+a-12=0$ $\therefore a=6$
$\therefore f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	⋯	−2	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=\int(6x^2+6x-12)dx=2x^3+3x^2-12x+C$
이고 $f(1)=3$이므로
$2+3-12+C=3$ $\therefore C=10$
따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$이므로 극댓값은
$f(-2)=-16+12+24+10=30$ 답 30

0716 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$에서
$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+1)dx$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$ ㉮

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-6x+2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-6x+2)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-3x^2+2x+C_2$ ㉯

이때 $f(0)=-3$, $g(0)=2$이므로

$f(0)+g(0)=-3+2=C_1 \quad \therefore C_1=-1$

$f(0)g(0)=(-3)\cdot 2=C_2 \quad \therefore C_2=-6$ ㉰

$f(x)+g(x)=x^2+x-1=(x-3)+(x^2+2)$,

$f(x)g(x)=x^3-3x^2+2x-6=(x-3)(x^2+2)$이므로

$\begin{cases}f(x)=x-3\\g(x)=x^2+2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2+2\\g(x)=x-3\end{cases}$

그런데 $f(0)=-3$, $g(0)=2$이므로

$f(x)=x-3$, $g(x)=x^2+2$ ㉱

$\therefore f(1)+g(2)=(1-3)+(4+2)=4$ ㉲

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	$f(x)+g(x)$를 적분상수 C_1을 써서 나타내기	20%
㉯	$f(x)g(x)$를 적분상수 C_2를 써서 나타내기	20%
㉰	적분상수 C_1, C_2의 값 구하기	20%
㉱	$f(x)$, $g(x)$ 구하기	20%
㉲	$f(1)+g(2)$의 값 구하기	20%

0717 $xf(x)-F(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=x^2+6x$

$xf'(x)=x(x+6) \quad \therefore f'(x)=x+6$ ㉮

$\therefore f(x)=\int(x+6)dx=\frac{1}{2}x^2+6x+C$

$f(1)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+6+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=-6$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x-6$ ㉯

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+6x-6=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -12이다. ㉰

답 -12

단계	채점요소	배점
㉮	$f'(x)$ 구하기	40%
㉯	$f(x)$ 구하기	40%
㉰	방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱 구하기	20%

0718 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$ ㉮

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3x=3x+3$ ㉯

$\therefore f(x)=\int(3x+3)dx=\frac{3}{2}x^2+3x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+3x$이므로 ㉰

$f(2)=6+6=12$ ㉱

답 12

단계	채점요소	배점
㉮	$f(0)$의 값 구하기	30%
㉯	$f'(x)$ 구하기	30%
㉰	$f(x)$ 구하기	30%
㉱	$f(2)$의 값 구하기	10%

0719 조건 ㈎에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}=2$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차식이다.

즉, $f'(x)=2x+k$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 ㈏에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉, $f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=6+k$

즉, $6+k=2$이므로 $k=-4$

$\therefore f'(x)=2x-4$

$f(x)=\int(2x-4)dx=x^2-4x+C$

이때 $f(3)=0$이므로 $9-12+C=0 \quad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x-1)(x-3)=0$의 해는

$x=1$ 또는 $x=3$ 답 $x=1$ 또는 $x=3$

08 정적분

교과서 문제 정복하기

본문 111쪽

0720 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 해가 $x=0$ 또는 $x=\alpha$ (중근)이므로

$f(x)=x(x-\alpha)^2$

조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$g(x)=\int g'(x)dx=\int\{xf(x)\}'dx$

$=xf(x)+C=x^2(x-\alpha)^2+C$

$\therefore g'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$

$=2x(x-\alpha)\{(x-\alpha)+x\}$

$=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

x	⋯	0	⋯	$\frac{\alpha}{2}$	⋯	α	⋯
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (나)에서 $g(x)$의 극댓값이 81이고 극솟값이 0이므로

$g(0)=g(\alpha)=C=0$

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+C=\frac{\alpha^4}{16}=81$

$\alpha^4=6^4$ $\therefore \alpha=6$ ($\because \alpha>0$)

따라서 $g(x)=x^2(x-6)^2$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=4\cdot16=64$ 답 ⑤

0721 ㄱ. [반례] $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$이면 $f'(x)=g'(x)=1$이므로 $f'(x)=g'(x)$이지만 $f(x)\neq g(x)$이다.

ㄴ. 주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}[\{f(x)\}^2+C]=2f(x)f'(x)$

$\therefore \int f'(x)f(x)dx\neq\{f(x)\}^2+C$

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\int g(x)dx+\int xg'(x)dx=\int\{g(x)+xg'(x)\}dx$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\{xg(x)+C\}=g(x)+xg'(x)$

$\therefore \int g(x)dx+\int xg'(x)dx=xg(x)+C$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0722 $\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1$ 답 **1**

0723 $\int_1^3(2y-1)dy=\left[y^2-y\right]_1^3$

$=(9-3)-(1-1)=6$ 답 **6**

0724 $\int_1^2(x^2-2x+6)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+6x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}-4+12\right)-\left(\frac{1}{3}-1+6\right)$

$=\frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

0725 $\int_1^2(x-1)(x-2)dx=\int_1^2(x^2-3x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)$

$=-\frac{1}{6}$ 답 $-\frac{1}{6}$

0726 $\int_2^2(x^3-x^2+4)dx=0$ 답 **0**

0727 $\int_1^{-2}(x^3+3x^2)dx=-\int_{-2}^1(x^3+3x^2)dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-2}^1$

$=-\left\{\left(\frac{1}{4}+1\right)-(4-8)\right\}$

$=-\frac{21}{4}$ 답 $-\frac{21}{4}$

0728 $\int_3^1(3x^2-x+1)dx$

$=-\int_1^3(3x^2-x+1)dx=-\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^3$

$=-\left\{\left(27-\frac{9}{2}+3\right)-\left(1-\frac{1}{2}+1\right)\right\}=-24$ 답 -24

0729 $\int_0^2(x^2-1)dx+\int_0^2(x^2+1)dx$

$=\int_0^2(x^2-1+x^2+1)dx=\int_0^2 2x^2dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

0730 $\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2)dx-\int_{-1}^{3}(x+3)dx$
$=\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2-x-3)dx=\int_{-1}^{3}(3x^2-5)dx$
$=\left[x^3-5x\right]_{-1}^{3}=12-4=8$ 답 8

0731 $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$
$=\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2+3x+1)dx-\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2+3x-1)dx$
$=\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1)dx$
$=\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx=\left[2x^3+2x\right]_{-2}^{1}=4-(-20)=24$ 답 24

0732 $\int_{-1}^{0}(x^2+1)dx+\int_{0}^{2}(x^2+1)dx$
$=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}=\frac{14}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=6$ 답 6

0733 $\int_{-1}^{0}(2x^2-x+1)dx+\int_{0}^{-1}(2x^2-x+1)dx$
$=\int_{-1}^{-1}(2x^2-x+1)dx=0$ 답 0

0734 $\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(y^2-4y+5)dy$
$=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(x^2-4x+5)dx$
$=\int_{-2}^{1}(x^2-4x+5)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\right]_{-2}^{1}$
$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{62}{3}\right)=24$ 답 24

0735 $\int_{0}^{1}(x^3-3x^2)dx+\int_{2}^{1}(3x^2-x^3)dx$
$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^3-3x^2)dx$
$=\int_{0}^{2}(x^3-3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{0}^{2}=-4$ 답 −4

0736 $\int_{-1}^{1}(x^5-x^3+3x^2+5x+1)dx$
$=2\int_{0}^{1}(3x^2+1)dx=2\left[x^3+x\right]_{0}^{1}=2\cdot2=4$ 답 4

0737 $\int_{-2}^{2}(x^7-4x^3+3x^2-1)dx$
$=2\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx=2\left[x^3-x\right]_{0}^{2}=2\cdot6=12$ 답 12

0738 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-2$ 답 $f(x)=2x-2$

0739 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2+2x-1$ 답 $f(x)=3x^2+2x-1$

0740 $F'(x)=x^2-2x-1$이라 하면
$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}(x^2-2x-1)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$
$=F'(0)=-1$ 답 −1

0741 $F'(t)=2t^2+3$이라 하면
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(2t^2+3)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$
$=F'(1)=5$ 답 5

유형 익히기 본문 112~118쪽

0742 $\int_{-1}^{2}(6t+5)(1-2t)dt+\int_{3}^{3}(6t-5)(1+2t)dt$
$=\int_{-1}^{2}(6t+5)(1-2t)dt+0=\int_{-1}^{2}(-12t^2-4t+5)dt$
$=\left[-4t^3-2t^2+5t\right]_{-1}^{2}=-27$ 답 ①

0743 $\int_{0}^{2}x^2f(x)dx=\int_{0}^{2}x^2(5x^2-8x+3)dx$
$=\int_{0}^{2}(5x^4-8x^3+3x^2)dx$
$=\left[x^5-2x^4+x^3\right]_{0}^{2}=8$ 답 8

0744 $\int_{-2}^{1}\{f'(x)+3x^2\}dx=\left[f(x)+x^3\right]_{-2}^{1}$
$=\{f(1)+1\}-\{f(-2)-8\}$
$=f(1)+4\ (\because f(-2)=5)$
즉, $f(1)+4=2$이므로 $f(1)=-2$ 답 −2

0745 $\int_{0}^{2}(-6x^2+6kx-5)dx=\left[-2x^3+3kx^2-5x\right]_{0}^{2}$
$=12k-26$
즉, $12k-26<10$이므로 $k<3$
따라서 정수 k의 최댓값은 2이다. 답 2

0746 $\int_{0}^{a}(3x^2+2x-2)dx=\left[x^3+x^2-2x\right]_{0}^{a}$
$=a^3+a^2-2a$
즉, $a^3+a^2-2a=0$이므로
$a(a+2)(a-1)=0$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

0747 $\int_{0}^{1}(6a^2x^2-8ax-3)dx=\left[2a^2x^3-4ax^2-3x\right]_{0}^{1}$
$=2a^2-4a-3$
$=2(a-1)^2-5$

따라서 주어진 정적분은 $a=1$일 때 최솟값 -5를 가지므로
$m=1$, $n=-5$ ····· ㉯

$\therefore m+n=1+(-5)=-4$ ····· ㉰

답 -4

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 정적분을 간단히 나타내기	40 %
㉯	m, n의 값 구하기	40 %
㉰	$m+n$의 값 구하기	20 %

0748 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 1)$을 지나므로
$f(-1)=a-b+c=1$ ····· ㉠
$f(1)=a+b+c=1$ ····· ㉡
㉠−㉡을 하면 $-2b=0$ $\therefore b=0$
$b=0$을 ㉠에 대입하면 $a+c=1$ $\therefore c=1-a$
따라서 $f(x)=ax^2+1-a$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^2+1-a)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+(1-a)x\right]_0^1$$
$$=-\frac{2}{3}a+1$$

즉, $-\frac{2}{3}a+1=-1$이므로 $a=3$ 답 ④

0749
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{y^3}{y+1}dy$$
$$=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 (x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{6}$$ 답 $\frac{5}{6}$

0750
$$A+B=\int_0^1 (3x+1)^2dx+\int_1^0 (3y-1)^2dy$$
$$=\int_0^1 (3x+1)^2dx-\int_0^1 (3x-1)^2dx$$
$$=\int_0^1 \{(9x^2+6x+1)-(9x^2-6x+1)\}dx$$
$$=\int_0^1 12x\,dx=\left[6x^2\right]_0^1=6$$ 답 6

0751
$$\int_0^2 (x+k)^2dx-\int_0^2 (x-k)^2dx$$
$$=\int_0^2 \{(x^2+2kx+k^2)-(x^2-2kx+k^2)\}dx$$
$$=\int_0^2 4kx\,dx=\left[2kx^2\right]_0^2=8k$$
즉, $8k=16$이므로 $k=2$ 답 ④

0752 $\int_3^1 f(x)dx=-2$에서 $\int_1^3 f(x)dx=2$
$$\therefore \int_1^3 \{f(x)-2\}^2dx$$
$$=\int_1^3 [\{f(x)\}^2-4f(x)+4]dx$$
$$=\int_1^3 \{f(x)\}^2dx-4\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 4\,dx$$
$$=6-4\cdot 2+8=6$$ 답 6

0753
$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx-\int_3^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx+\int_2^3 \frac{x^2}{x^2+1}dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\int_1^3 \frac{x^2}{x^2+1}dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\int_1^3 \frac{x^2+1}{x^2+1}dx=\int_1^3 dx=\left[x\right]_1^3=2$$ 답 2

0754
$$\int_{-1}^1 (2x^3+6x^2-2)dx+\int_1^2 (2y^3+6y^2-2)dy$$
$$=\int_{-1}^1 (2x^3+6x^2-2)dx+\int_1^2 (2x^3+6x^2-2)dx$$
$$=\int_{-1}^2 (2x^3+6x^2-2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4+2x^3-2x\right]_{-1}^2=\frac{39}{2}$$ 답 $\frac{39}{2}$

0755
$$\int_2^5 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_2^5 f(x)dx+\int_5^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_2^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_1^3 (x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^3=\frac{2}{3}$$ 답 $\frac{2}{3}$

0756
$$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=2-8+4=-2$$ 답 -2

0757
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (x-2)^2dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$ 답 $\frac{5}{6}$

0758 $f(x)=\begin{cases}12 & (x\geq 0)\\ 3x+12 & (x\leq 0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-4}^{4} xf(x)dx=\int_{-4}^{0}(3x^2+12x)dx+\int_{0}^{4}12x\,dx$

$=\left[x^3+6x^2\right]_{-4}^{0}+\left[6x^2\right]_{0}^{4}$

$=-32+96=64$ 답 **64**

0759 $\int_{0}^{2}|x^2-1|dx-2\int_{2}^{0}|1-x^2|dx$

$=\int_{0}^{2}|x^2-1|dx+2\int_{0}^{2}|x^2-1|dx$

$=3\int_{0}^{2}|x^2-1|dx$

한편, $|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ -x^2+1 & (-1\leq x\leq 1)\end{cases}$이므로

$\int_{0}^{2}|x^2-1|dx=\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

$\therefore$ (주어진 식)$=3\int_{0}^{2}|x^2-1|dx=3\cdot 2=6$ 답 **6**

0760 $|x^2+x-2|=\begin{cases}x^2+x-2 & (x\leq -2 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ -x^2-x+2 & (-2\leq x\leq 1)\end{cases}$

$\therefore \int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx$

$=\int_{0}^{1}(-x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=3$ 답 **3**

0761 $|x|=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\ -x & (x\leq 0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-2}^{3}(|x|-2k)dx=\int_{-2}^{0}(-x-2k)dx+\int_{0}^{3}(x-2k)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2-2kx\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-2kx\right]_{0}^{3}$

$=(2-4k)+\left(\frac{9}{2}-6k\right)=-10k+\frac{13}{2}$

즉, $-10k+\frac{13}{2}=-\frac{7}{2}$이므로 $k=1$ 답 ①

0762 $|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\geq 2)\\ -x+2 & (x\leq 2)\end{cases}$

$\therefore \int_{0}^{a}x|x-2|dx=\int_{0}^{2}x(-x+2)dx+\int_{2}^{a}x(x-2)dx$

$=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{a}(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{a}$

$=\frac{4}{3}+\left(\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{4}{3}\right)=\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{8}{3}$

즉, $\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{8}{3}=8$이므로

$a^3-3a^2-16=0$, $(a-4)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a$는 실수) 답 ②

0763 $f(x)=|x-3|$, $g(x)=x^2+2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+2)$

$=|(x^2+2)-3|=|x^2-1|$

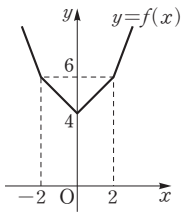
$=\begin{cases}x^2-1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ -x^2+1 & (-1\leq x\leq 1)\end{cases}$

$\therefore \int_{-2}^{1}(f\circ g)(x)dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

0764 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값을 가지므로 ㉮

$a=f(0)=4$ ㉯

$\therefore \int_{2}^{a}f(x)dx=\int_{2}^{4}(x+2+x+x-2)dx=\int_{2}^{4}3x\,dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{2}^{4}=18$ ㉰

답 **18**

단계	채점요소	배점
㉮	함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기	40 %
㉯	a의 값 구하기	20 %
㉰	정적분의 값 구하기	40 %

0765 $\int_{-2}^{4}(5x^4-x^3+3x+1)dx+\int_{4}^{2}(5x^4-x^3+3x+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(5x^4-x^3+3x+1)dx=2\int_{0}^{2}(5x^4+1)dx$

$=2\left[x^5+x\right]_{0}^{2}=2\cdot 34=68$ 답 ①

0766 $\int_{-a}^{a}(2x^3-3x+4)dx=2\int_{0}^{a}4\,dx=2\left[4x\right]_{0}^{a}=8a$

즉, $8a=16$이므로 $a=2$ 답 **2**

0767 $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1}ax^2dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}a$

즉, $\frac{2}{3}a=1$이므로 $a=\frac{3}{2}$

$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} (ax^3+bx^2)dx = 2\int_{0}^{1} bx^2 dx$

$= 2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}b$

즉, $\frac{2}{3}b = -1$이므로 $b = -\frac{3}{2}$

$\therefore a+2b = \frac{3}{2} + (-3) = -\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0768 $\int_{-1}^{1} (1+2x+3x^2+\cdots+2nx^{2n-1})dx$

$= 2\int_{0}^{1} \{1+3x^2+5x^4+\cdots+(2n-1)x^{2n-2}\}dx$

$= 2\left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}\right]_0^1$

$= 2(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n개}) = 2n$

즉, $2n = 100$이므로 $n = 50$ 답 **50**

0769 $f(-x) = -f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $x^2 f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-2}^{2} (5x^2+2x+1)f(x)dx$

$= 5\int_{-2}^{2} x^2 f(x)dx + 2\int_{-2}^{2} xf(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx$

$= 4\int_{0}^{2} xf(x)dx = 4\cdot 2 = 8$ 답 8

0770 $f(-x) = f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-4}^{4} f(x)dx = 2\int_{0}^{4} f(x)dx = 14 \quad \therefore \int_{0}^{4} f(x)dx = 7$

$\therefore \int_{2}^{4} f(x)dx = \int_{2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$

$= -\int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$

$= -5+7 = 2$ 답 **2**

0771 $f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수이므로

$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$

즉, $f(x)g(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} \{f(x)+g(x)\}dx + \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx$

$= \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{a} g(x)dx + \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx$

$= 2\int_{0}^{a} g(x)dx = 2\cdot 5 = 10$ 답 **10**

0772 $\int_{0}^{2} f(t)dt = k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x) = 3x^2+2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2} (3t^2+2t+k)dt = k$, $\left[t^3+t^2+kt\right]_0^2 = k$

$12+2k = k \quad \therefore k = -12$

따라서 $f(x) = 3x^2+2x-12$이므로

$f(2) = 12+4-12 = 4$ 답 ⑤

0773 $\int_{0}^{3} tf'(t)dt = k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x) = 4x+k$

$\therefore f'(x) = 4$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{3} 4t\,dt = k$, $\left[2t^2\right]_0^3 = k \quad \therefore k = 18$

따라서 $f(x) = 4x+18$이므로

$f(-3) = -12+18 = 6$ 답 ②

0774 $\int_{1}^{2} f(t)dt = k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x) = \frac{12}{7}x^2 - 2kx + k^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{2} \left(\frac{12}{7}t^2 - 2kt + k^2\right)dt = k$, $\left[\frac{4}{7}t^3 - kt^2 + k^2 t\right]_1^2 = k$

$4-3k+k^2 = k$, $k^2-4k+4 = 0$

$(k-2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$

$\therefore 10\int_{1}^{2} f(x)dx = 10k = 20$ 답 **20**

0775 $f(x) = 3x^2 + \int_{0}^{1} (2x-1)f(t)dt$

$= 3x^2 + 2x\int_{0}^{1} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt$

이때 $\int_{0}^{1} f(t)dt = k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x) = 3x^2+2kx-k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1} (3t^2+2kt-k)dt = k$, $\left[t^3+kt^2-kt\right]_0^1 = k$

$1+k-k = k \quad \therefore k = 1$

$\therefore \int_{0}^{1} f(x)dx = k = 1$ 답 **1**

0776 $a = -\int_{0}^{2} f(t)dt$, $b = 2\int_{0}^{1} f(t)dt$이므로

$a = -\int_{0}^{2} (t^2+at+b)dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^2$

$= -\left(\frac{8}{3}+2a+2b\right) = -\frac{8}{3}-2a-2b$

$\therefore 3a+2b = -\frac{8}{3}$ …… ㉠

$b = 2\int_{0}^{1} (t^2+at+b)dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^1$

$= 2\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b\right) = \frac{2}{3}+a+2b$

$\therefore a+b = -\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{2}{3}$

$\therefore a-b = -2$ 답 -2

0777 $\int_3^x f(t)dt=x^2-ax-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$9-3a-3=0$ $\therefore a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

$\therefore f(4)=8-2=6$ 답 ①

0778 $f(x)=\int_1^x(2t-3)(t^2+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-3)(x^2+1)$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$

$=2f'(1)=2\cdot(-2)=-4$

답 -4

0779 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-8$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2-2a-8=0$, $(a-4)(a+2)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

…… ㉮

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

$\therefore f(a)=f(4)=8-2=6$

…… ㉯

$\therefore a+f(a)=4+6=10$

…… ㉰

답 **10**

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	50%
㉯	$f(a)$의 값 구하기	40%
㉰	$a+f(a)$의 값 구하기	10%

0780 $f(x)=\int_x^{x+2}(t^3-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+2)^3-(x+2)\}-(x^3-x)=6x^2+12x+6$

이때 $f(x)=\int(6x^2+12x+6)dx=2x^3+6x^2+6x+C$이므로

$f(-1)=-2+6-6+C=0$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=2x^3+6x^2+6x+2$이므로

$f(1)=2+6+6+2=16$ 답 ④

0781 $xf(x)=6x^4-4x^3+12x^2+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=6-4+12=14$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=24x^3-12x^2+24x+f(x)$

$xf'(x)=24x^3-12x^2+24x$ $\therefore f'(x)=24x^2-12x+24$

이때 $f(x)=\int(24x^2-12x+24)dx=8x^3-6x^2+24x+C$

이므로

$f(1)=8-6+24+C=14$ $\therefore C=-12$

따라서 $f(x)=8x^3-6x^2+24x-12$이므로

$f(2)=64-24+48-12=76$ 답 **76**

0782 $\int_a^x(x-t)f(t)dt=x^3-2x^2-3x-4$에서

$x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=x^3-2x^2-3x-4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-4x-3$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=3x^2-4x-3$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-4$

$\therefore f(2)=12-4=8$ 답 ④

0783 $\int_2^x(x-t)f(t)dt=-2x^3+4ax+b$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-16+8a+b=0$ $\therefore 8a+b=16$ …… ㉠

$\int_2^x(x-t)f(t)dt=-2x^3+4ax+b$에서

$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=-2x^3+4ax+b$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-6x^2+4a$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=-6x^2+4a$

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-24+4a=0$ $\therefore a=6$

㉠에 $a=6$을 대입하면 $48+b=16$ $\therefore b=-32$

$\therefore a-b=6-(-32)=38$ 답 **38**

0784 $\int_0^x(x-t)f'(t)dt=\frac{2}{3}x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{2}{3}x^3$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=2x^2$

$\therefore \int_0^x f'(t)dt=2x^2$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x$

이때 $f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+C$이므로

$f(0)=C=2$

따라서 $f(x)=2x^2+2$이므로

$f(1)=2+2=4$ 답 **4**

0785 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$$

$$=8-8+3=3$$ 답 ③

0786 $f(x)=x^3-x^2+2$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}(x^3-x^2+2)dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot2=2F'(1)=2f(1)$$

$$=2(1-1+2)=4$$ 답 ④

0787 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)$$

$$=6+a$$

즉, $6+a=2$이므로 $a=-4$ 답 -4

0788 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$

$$=\frac{1}{4}(8-8+12)=3$$ 답 3

0789 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$$

$$=3F'(1)=3f(1)$$

$$=3(1+2-3+1)=3$$ 답 3

0790 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-3h}^{2+h}f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(2+h)-F(2)\}-\{F(2-3h)-F(2)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(2-3h)-F(2)}{-3h}\cdot(-3)$$

$$=F'(2)+3F'(2)=4F'(2)$$

$$=4f(2)=40-8k$$

즉, $40-8k=24$이므로 $k=2$ 답 2

0791 조건 (나)에서 양변을 h로 나누면

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

$F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\therefore g'(x)=F'(x)=f(x)=3x^2-2x+1$$ ㉮

이때 $g(x)=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$이므로

$g(0)=C=2$

$$\therefore g(x)=x^3-x^2+x+2$$ ㉯

$$\therefore g'(2)+g(2)=9+8=17$$ ㉰

답 17

단계	채점요소	배점
㉮	$g'(x)$ 구하기	40 %
㉯	$g(x)$ 구하기	40 %
㉰	$g'(2)+g(2)$의 값 구하기	20 %

유형 up

본문 119~120쪽

0792 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_2^5f(x)dx=\int_5^8f(x)dx=\int_8^{11}f(x)dx=3$$

$$\therefore\int_{-1}^{11}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_2^5f(x)dx+\int_5^8f(x)dx+\int_8^{11}f(x)dx$$

$$=4\int_{-1}^{2}f(x)dx=4\cdot3=12$$ 답 12

0793 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_0^2f(x)dx=\int_2^4f(x)dx=\cdots=\int_8^{10}f(x)dx=10$$

또, $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-10}^{10}f(x)dx$$

$$=2\int_0^{10}f(x)dx$$

$$=2\left\{\int_0^2f(x)dx+\int_2^4f(x)dx+\cdots+\int_8^{10}f(x)dx\right\}$$

$$=2\cdot5\int_0^2f(x)dx=2\cdot5\cdot10=100$$ 답 100

0794 $f(x+1)=f(x)$이므로

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx$

$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=4\int_{0}^{1}f(x)dx=4\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$

$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0795 $f(x)=\int_{-3}^{x}(3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=5$에서 극솟값 -32를 가지므로

$f'(5)=0$, $f(5)=-32$

$f'(5)=0$에서 $75+5a+b=0$

$\therefore 5a+b=-75$ …… ㉠

$f(5)=-32$에서

$\int_{-3}^{5}(3t^2+at+b)dt=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-3}^{5}$

$=125+\frac{25}{2}a+5b-\left(-27+\frac{9}{2}a-3b\right)$

$=152+8a+8b=-32$

$\therefore a+b=-23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-13$, $b=-10$

$\therefore ab=130$ 답 ③

0796 $f(x)=\int_{x}^{x+a}t(t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+a)(x+a-2)-x(x-2)$

$=2ax+a^2-2a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-1)=0$에서 $a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 ④

0797 $f(x)=\int_{-1}^{x}t(t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$M=f(0)=\int_{-1}^{0}t(t-1)dt=\int_{-1}^{0}(t^2-t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{6}$

$m=f(1)=\int_{-1}^{1}t(t-1)dt=\int_{-1}^{1}(t^2-t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{6}-\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{3}$

$\therefore M+m=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ 답 ②

0798 주어진 그래프에서

$F(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax$ ($a>0$)

로 놓을 수 있다.

$F(x)=\int_{2}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$ $\therefore f(x)=2ax-2a$

$y=f(x)$의 그래프가 점 (2, 4)를 지나므로

$f(2)=4a-2a=4$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x-4$이므로

$f(3)=12-4=8$ 답 ④

0799 주어진 그래프에서 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ ($a<0$)으로 놓으면 $f(0)=3$이므로

$-3a=3$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=-(x+1)(x-3)$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	…	−1	…	3	…
$F'(x)$	−	0	+	0	−
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $F(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}(-t^2+2t+3)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+3t\right]_{-1}^{x}=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+\frac{5}{3}$

이므로 $F(x)$의 극댓값은

$F(3)=-9+9+9+\frac{5}{3}=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

0800 $f(x)=\int_{0}^{x}(t-a)(t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=(x-a)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=2$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $x=2$에서 극소이다. …… ㉮

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 $\frac{2}{3}$를 가지므로

$f(2)=\int_{0}^{2}(t-a)(t-2)dt=\int_{0}^{2}\{t^2-(a+2)t+2a\}dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+2}{2}t^2+2at\right]_{0}^{2}=2a-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

$\therefore a=1$ …… ㉯

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)dt=\int_0^1(t^2-3t+2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{5}{6}$ ㉢

답 $\frac{5}{6}$

단계	채점요소	배점
㉮	극댓값을 갖는 x의 값 구하기	30 %
㉯	a의 값 구하기	40 %
㉰	극댓값 구하기	30 %

0801 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^3-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$

$=3x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(-1)=\int_{-1}^0(t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{4}$

$f(0)=\int_0^1(t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$

$f(1)=\int_1^2(t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=\frac{9}{4}$

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=\frac{9}{4}$, 최솟값 $m=-\frac{1}{4}$이므로

$M+m=\frac{9}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=2$ 답 **2**

0802 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\frac{3}{4}x^4-x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{3}{4}x^4-x^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^3-2x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=3x^3-2x$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 -2를 갖는다. 답 -2

0803 주어진 그래프에서 $f(x)=a(x-1)(x-4)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$

$=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)$

$=2a(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 $g(x)$의 최솟값은 $g(2)$이다. 답 ②

시험에 꼭 나오는 문제 본문 121~123쪽

0804 $\int_0^1(ax^2+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{a}{3}+1$

즉, $\frac{a}{3}+1=4$이므로 $a=9$ 답 ②

0805 $\int_0^2(4x+2)dx-\int_k^2(4t+2)dt$

$=\int_0^2(4x+2)dx-\int_k^2(4x+2)dx$

$=\int_0^2(4x+2)dx+\int_2^k(4x+2)dx$

$=\int_0^k(4x+2)dx=\left[2x^2+2x\right]_0^k=2k^2+2k$

즉, $2k^2+2k=84$이므로

$k^2+k-42=0$, $(k+7)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ $(\because k>0)$ 답 **6**

0806 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$이므로

$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx$에서 $\int_0^2 f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=0$

한편, $f(0)=1$이므로

$f(x)=ax^2+bx+1$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)이라 하면

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(ax^2+bx+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}a+2b+2$

$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_{-2}^0(ax^2+bx+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right]_{-2}^0$

$=\frac{8}{3}a-2b+2$

즉, $\frac{8}{3}a+2b+2=0$, $\frac{8}{3}a-2b+2=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{4}$, $b=0$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+1$이므로

$f(2)=-3+1=-2$ 답 -2

0807 $\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(2x-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1}+\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}$

$=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ 답 $\frac{11}{3}$

0808 $0<a<1$이므로

$f(a)=\int_0^1(x+a)|x-a|dx$

$=\int_0^a(a^2-x^2)dx+\int_a^1(x^2-a^2)dx$

$=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^1=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$

$f'(a)=4a^2-2a=2a(2a-1)$

$f'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

x	(0)	…	$\frac{1}{2}$	…	(1)
$f'(a)$		−	0	+	
$f(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$ 답 ②

0809 $f(3+x)=f(3-x)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^6f(x)dx=2\int_3^6f(x)dx=2\left\{\int_3^9f(x)dx+\int_9^6f(x)dx\right\}$

$=2\left\{\int_3^9f(x)dx-\int_6^9f(x)dx\right\}$

$=2(8-2)=12$ 답 12

0810 $f(x)=x^2+\int_0^1(2x+1)f(t)dt$

$=x^2+2x\int_0^1f(t)dt+\int_0^1f(t)dt$

이때 $\int_0^1f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2+2kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(t^2+2kt+k)dt=k$, $\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+kt\right]_0^1=k$

$\frac{1}{3}+2k=k$ $\therefore k=-\frac{1}{3}$

$\therefore \int_0^1f(x)dx=k=-\frac{1}{3}$ 답 ②

0811 $f(x)=\int_0^x(2at+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2ax+1$

이때 $f'(2)=17$이므로 $4a+1=17$ $\therefore a=4$ 답 4

0812 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=2x^4-3x^2$에서

$x\int_0^xf(t)dt-\int_0^xtf(t)dt=2x^4-3x^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^xf(t)dt+xf(x)-xf(x)=8x^3-6x$

$\therefore \int_0^xf(t)dt=8x^3-6x$

위의 등식에 $x=2$를 대입하면

$\int_0^2f(t)dt=64-12=52$ $\therefore \int_0^2f(x)dx=52$ 답 52

0813 $F'(x)=f(x)$로 놓으면 조건 (가)에서

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^xf(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)$

$=f(2)=8a-b+4$

즉, $8a-b+4=2$이므로 $8a-b=-2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\int_0^1f(x)dx=\int_0^1(x^2+4ax-b)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2ax^2-bx\right]_0^1=2a-b+\frac{1}{3}$

즉, $2a-b+\frac{1}{3}=1$이므로 $2a-b=\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{9}$, $b=-\frac{14}{9}$

$\therefore a-b=-\frac{4}{9}-\left(-\frac{14}{9}\right)=\frac{10}{9}$ 답 $\frac{10}{9}$

0814 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\int_{-1}^1f(x)dx=\int_1^3f(x)dx=\cdots=\int_{11}^{13}f(x)dx$

$\therefore \int_1^{13}f(x)dx$

$=\int_1^3f(x)dx+\int_3^5f(x)dx+\cdots+\int_{11}^{13}f(x)dx$

$=6\int_{-1}^1f(x)dx=6\int_{-1}^1(-x^2+1)dx$

$=6\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1=6\cdot\frac{4}{3}=8$ 답 8

0815 $f(x)=\int_0^x(3t^2-6t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_0^2(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$

즉, $\alpha=2$, $\beta=-4$이므로 $\alpha+\beta=-2$ 답 ①

0816 $-2<x<-1$에서 $f(x)$는 증가하므로 $f'(x)>0$

$-1<x<1$에서 $f(x)$는 감소하므로 $f'(x)<0$

$\therefore \int_{-2}^{1}|f'(x)|dx$

$=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx-\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-2}^{-1}-\left[f(x)\right]_{-1}^{1}$

$=\{f(-1)-f(-2)\}-\{f(1)-f(-1)\}$

$=(4-1)-(1-4)=6$ 답 ②

0817 $\int_0^1(x-k)^2f(x)dx$

$=\int_0^1(x^2-2kx+k^2)f(x)dx$

$=\int_0^1x^2f(x)dx-2k\int_0^1xf(x)dx+k^2\int_0^1f(x)dx$

$=k^2-6k+\int_0^1x^2f(x)dx=(k-3)^2-9+\int_0^1x^2f(x)dx$

이때 정적분 $\int_0^1x^2f(x)dx$는 상수이므로 $k=3$일 때 주어진 정적분의 값이 최소가 된다. 답 ③

0818 조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수, $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다. ㉮

$\therefore \int_{-3}^{3}\{2f(x)-3g(x)\}dx$

$=2\int_{-3}^{3}f(x)dx-3\int_{-3}^{3}g(x)dx$

$=4\int_0^3f(x)dx$ ㉯

$=4\cdot4=16$ ㉰

답 **16**

단계	채점요소	배점
㉮	두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 파악하기	40 %
㉯	우함수, 기함수의 특성을 이용하여 정적분 간단히 하기	40 %
㉰	정적분의 값 구하기	20 %

0819 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-1+a+5-2$ $\therefore a=-3$ ㉮

$\int_1^x(x-t)f'(t)dt=x^4-x^3-3x^2+5x-2$에서

$x\int_1^xf'(t)dt-\int_1^xtf'(t)dt=x^4-x^3-3x^2+5x-2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^xf'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3-3x^2-6x+5$

$\therefore \int_1^xf'(t)dt=4x^3-3x^2-6x+5$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x^2-6x-6$ ㉯

$\therefore f(x)=\int(12x^2-6x-6)dx=4x^3-3x^2-6x+C$

이때 $f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값 M, $x=1$에서 극솟값 m을 가지므로

$M=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+3+C=\frac{7}{4}+C$

$m=f(1)=4-3-6+C=-5+C$ ㉰

$\therefore M-m=\left(\frac{7}{4}+C\right)-(-5+C)=\frac{27}{4}$ ㉱

답 $\frac{27}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	20 %
㉯	$f'(x)$ 구하기	30 %
㉰	$f(x)$의 극댓값, 극솟값 구하기	40 %
㉱	$M-m$의 값 구하기	10 %

0820 주어진 그래프에서

$f(x)=a(x-2)(x-7)$ $(a<0)$

로 놓을 수 있다. ㉮

$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$

$=a(x-1)(x-6)-a(x-2)(x-7)$

$=2a(x-4)$ ㉯

$g'(x)=0$에서 $x=4$

x	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로
$k=4$ ㉢

답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	그래프를 이용하여 $f(x)$의 식 세우기	20%
㉯	$g'(x)$ 구하기	40%
㉰	k의 값 구하기	40%

0821 $f(x)=\begin{cases}2 & (|x|\geq 1)\\ |x| & (|x|\leq 1)\end{cases}$의 양변에 x 대신 $2-x$를 대입하면

$f(2-x)=\begin{cases}2 & (|2-x|\geq 1)\\ |2-x| & (|2-x|\leq 1)\end{cases}$

이때 $|2-x|=|x-2|$이므로

$|2-x|\geq 1$에서 $|x-2|\geq 1$ $\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$

$|2-x|\leq 1$에서 $|x-2|\leq 1$ $\therefore 1\leq x\leq 3$

즉, $f(2-x)=\begin{cases}2 & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 3)\\ |2-x| & (1\leq x\leq 3)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 f(2-x)dx&=\int_0^1 x^2 f(2-x)dx+\int_1^2 x^2 f(2-x)dx\\&=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 x^2|2-x|dx\\&=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx\\&=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_1^2\\&=\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{12}\right)=\frac{19}{12}\end{aligned}$$

따라서 $p=19$, $q=12$이므로
$p+q=19+12=31$ 답 **31**

0822 $f(x)$의 차수를 2 이상의 자연수 n이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로
$n^2=n+1$ $\therefore n^2-n-1=0$
그런데 위의 식을 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다.
이때 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$
이므로 주어진 등식에 대입하면

$$a^2x+ab+b=-x^2+4x+\int_0^x f(t)dt$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$a^2=-2x+4+f(x)$ $\therefore f(x)=2x+a^2-4$
즉, $ax+b=2x+a^2-4$이므로
$a=2$, $b=0$
따라서 $f(x)=2x$이므로

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 2xdx=\Big[x^2\Big]_2^4=12$$

답 **12**

0823 $g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt$에서

(i) $x<1$일 때, $f(x)=-1$이므로

$$g(x)=\int_{-1}^x (1-t)dt=\Big[t-\frac{1}{2}t^2\Big]_{-1}^x=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$

(ii) $x\geq 1$일 때, $f(x)=-x+2$이므로

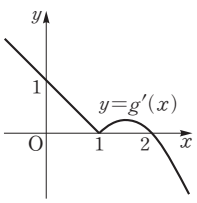
$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-1}^1 (1-t)dt+\int_1^x (t-1)(-t+2)dt\\&=\Big[t-\frac{1}{2}t^2\Big]_{-1}^1+\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\Big]_1^x\\&=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} & (x<1)\\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6} & (x\geq 1)\end{cases}$

한편, $g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-1)f(x)$

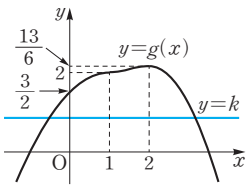
$=\begin{cases}-(x-1) & (x<1)\\ (x-1)(-x+2) & (x>1)\end{cases}$



ㄱ. $1<x<2$일 때,
$g'(x)=-(x-1)(x-2)>0$
이므로 $g(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 증가한다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1-}\{-(x-1)\}=\lim_{x\to 1+}(x-1)(-x+2)=0$
즉, $g'(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

09 정적분의 활용

교과서 문제 정복하기

본문 125쪽

0824 $\int_0^2 -(x^2-2x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$

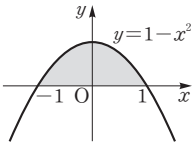
$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0825 곡선 $y=1-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $1-x^2=0$에서

$(1+x)(1-x)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^1 (1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

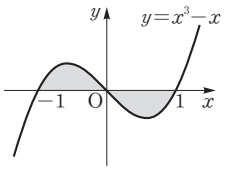
0826 곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x=0$에서

$x(x^2-1)=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^1 |x^3-x|dx=\int_{-1}^0 (x^3-x)dx-\int_0^1 (x^3-x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

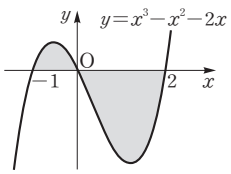
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0827 곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-2x=0$에서 $x(x^2-x-2)=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^2 |x^3-x^2-2x|dx$

$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx-\int_0^2 (x^3-x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ 답 $\frac{37}{12}$

0828 $\int_{-1}^2 -(x^3-3x^2)dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^2$

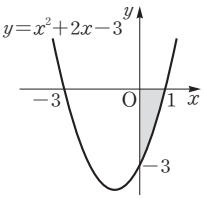
$=-\left(-4-\frac{5}{4}\right)=\frac{21}{4}$ 답 $\frac{21}{4}$

0829 곡선 $y=x^2+2x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$-\int_0^1 (x^2+2x-3)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_0^1$

$=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

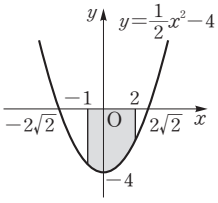
0830 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-4$와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}x^2-4=0$에서

$x^2-8=0$

$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는



$-\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=-\left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-1}^2=-\left(-\frac{40}{6}-\frac{23}{6}\right)$

$=\frac{21}{2}$ 답 $\frac{21}{2}$

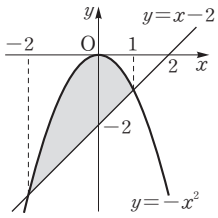
0831 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는

$-x^2=x-2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-2}^1 \{-x^2-(x-2)\}dx=\int_{-2}^1 (-x^2-x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$

$=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

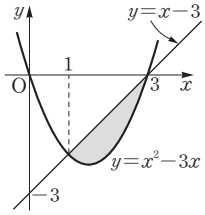
0832 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=x-3$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=x-3$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$\int_1^3 \{(x-3)-(x^2-3x)\}dx=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0833 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서

$x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

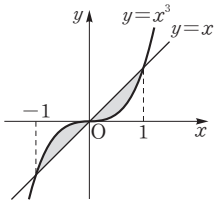
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

0834 두 곡선 $y=x^2-5x+6$, $y=-x^2+3x$의 교점의 x좌표는

$x^2-5x+6=-x^2+3x$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

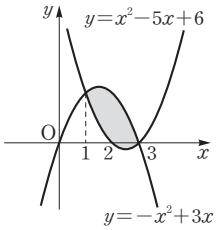
따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{3}\{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}$

$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$



답 $\frac{8}{3}$

0835 두 곡선 $y=x^3-x^2$과 $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2=x^2$에서

$x^3-2x^2=0$

$x^2(x-2)=0$

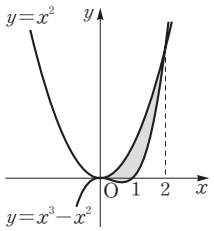
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-x^2)\}dx=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}$

$=\frac{4}{3}$



답 $\frac{4}{3}$

0836 $\int_{0}^{2}(-t^2+4t-3)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{0}^{2}$

$=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

0837 $\int_{1}^{4}(-t^2+4t-3)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{1}^{4}$

$=0$

답 **0**

0838 $\int_{1}^{4}|-t^2+4t-3|dt$

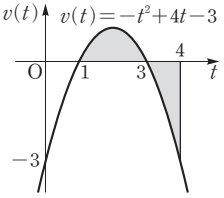
$=\int_{1}^{3}(-t^2+4t-3)dt$

$-\int_{3}^{4}(-t^2+4t-3)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{1}^{3}$

$-\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{3}^{4}$

$=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$



답 $\frac{8}{3}$

유형 익히기 본문 126~132쪽

0839 곡선 $y=x^2-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-6x=0$에서

$x(x-6)=0$

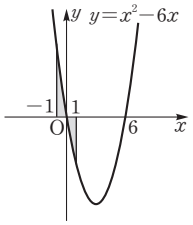
$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(x^2-6x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-6x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=6$



답 **6**

0840 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4x-3=0$에서

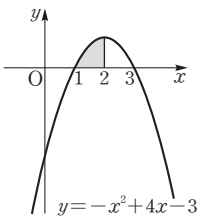
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{2}{3}$



답 ②

0841 곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-2x=0$에서

$x(x^2+x-2)=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

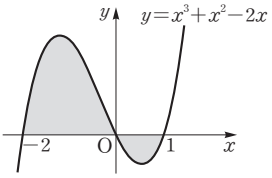
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$



답 ③

0842 곡선 $y=-x^2+ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+ax=0$에서

$x(x-a)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=a$

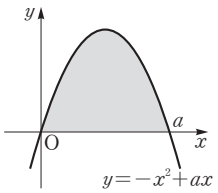
오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{32}{3}$이므로

$a^3=64$ $\therefore a=4$



답 ②

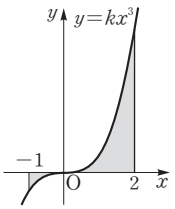
0843 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$-\int_{-1}^0 kx^3dx+\int_0^2 kx^3dx$

$=-\left[\frac{k}{4}x^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{k}{4}x^4\right]_0^2$

$=\frac{k}{4}+4k=\frac{17}{4}k$

따라서 $\frac{17}{4}k=17$이므로 $k=4$



답 ④

0844 $\int_1^x f(t)dt=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x^2-x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

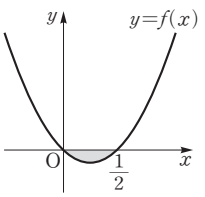
$2x^2-x=0$에서 $x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$-\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^2-x)dx=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{24}$



답 $\frac{1}{24}$

0845 곡선 $y=x(x-3)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x(x-3)^2=x$에서

$x(x^2-6x+8)=0$

$x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

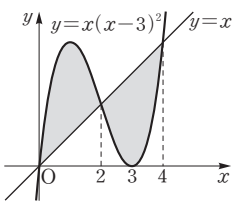
따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\{x(x-3)^2-x\}dx+\int_2^4\{x-x(x-3)^2\}dx$

$=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx+\int_2^4(-x^3+6x^2-8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$

$=4+4=8$



답 ④

0846 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=2x$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

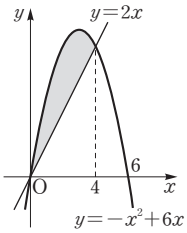
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^4\{(-x^2+6x)-2x\}dx=\int_0^4(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$

$=\frac{32}{3}$



답 $\frac{32}{3}$

다른풀이 포물선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{|-1|(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$

참고 포물선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+n$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 포물선과 직선 사이의 넓이 S는

$\Rightarrow S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

0847 곡선 $y=3x-x^2$과 직선 $y=3-x$의 교점의 x좌표는

$3x-x^2=3-x$에서

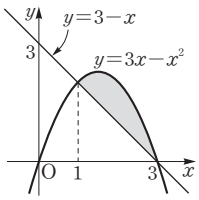
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^3\{(3x-x^2)-(3-x)\}dx=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$



답 ②

0848 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=ax$에서

$x\{x-(a+3)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+3$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

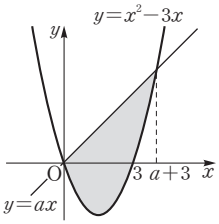
$\int_0^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}dx=\int_0^{a+3}\{-x^2+(a+3)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{a+3}$

$=\frac{1}{6}(a+3)^3$

즉, $\frac{(a+3)^3}{6}=36$이므로 $(a+3)^3=6^3$

$a+3=6$ $\therefore a=3$



답 3

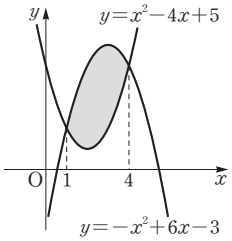
0849 두 곡선 $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+5=-x^2+6x-3$에서

$2x^2-10x+8=0$, $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4\{(-x^2+6x-3)-(x^2-4x+5)\}dx$$

$$=\int_1^4(-2x^2+10x-8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=9$$

답 ①

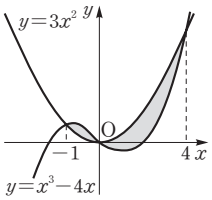
0850 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=3x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=3x^2$에서

$x^3-3x^2-4x=0$

$x(x^2-3x-4)=0$

$x(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0\{(x^3-4x)-3x^2\}dx+\int_0^4\{3x^2-(x^3-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^3-3x^2-4x)dx+\int_0^4(-x^3+3x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2\right]_0^4$$

$$=\frac{3}{4}+32=\frac{131}{4}$$

답 $\frac{131}{4}$

0851 곡선 $y=x^2-1$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=x^2-1$ $\therefore y=-x^2+1$

이 곡선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=-(x-1)^2+4$

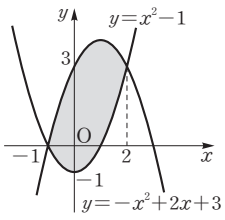
두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-(x-1)^2+4$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$2x^2-2x-4=0$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2$$

$=9$

답 9

0852 두 곡선 $y=x^3-3x^2$, $y=x^2-3x$의 교점의 x좌표는

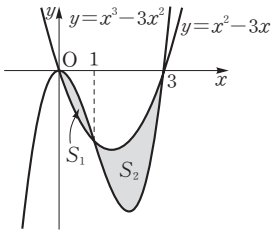
$x^3-3x^2=x^2-3x$에서

$x^3-4x^2+3x=0$

$x(x^2-4x+3)=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$



㉮

$$S_1=\int_0^1\{x^3-3x^2-(x^2-3x)\}dx=\int_0^1(x^3-4x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

$$S_2=\int_1^3\{x^2-3x-(x^3-3x^2)\}dx=\int_1^3(-x^3+4x^2-3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

㉯

$\therefore S_1S_2=\frac{10}{9}$

㉰

답 $\frac{10}{9}$

단계	채점요소	배점
㉮	두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	30 %
㉯	S_1, S_2의 값 구하기	50 %
㉰	S_1S_2의 값 구하기	20 %

0853 $y=x|x-1|=\begin{cases}x(x-1) & (x\geq1)\\ -x(x-1) & (x\leq1)\end{cases}$

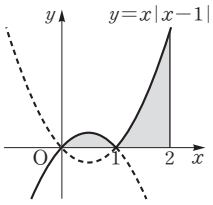
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{-x(x-1)\}dx+\int_1^2x(x-1)dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$



답 ②

0854 $y=|x(x-1)|=\begin{cases}x(x-1) & (x\leq0 \text{ 또는 } x\geq1)\\ -x(x-1) & (0\leq x\leq1)\end{cases}$

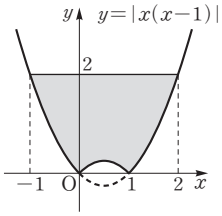
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0\{2-(x^2-x)\}dx+\int_0^1\{2-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{2-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2+x+2)dx+\int_0^1(x^2-x+2)dx+\int_1^2(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=\frac{25}{6}$$



답 ④

0855 $y=|x^2-ax|=\begin{cases} x^2-ax & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge a) \\ -x^2+ax & (0\le x\le a) \end{cases}$

곡선 $y=|x^2-ax|$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

(i) $x\le 0$ 또는 $x\ge a$일 때

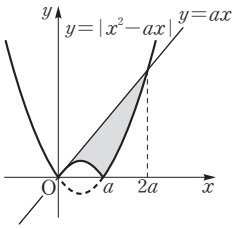
$x^2-ax=ax$에서 $x^2-2ax=0$

$x(x-2a)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2a$

(ii) $0\le x\le a$일 때

$-x^2+ax=ax$에서 $x^2=0$ $\therefore x=0$

오른쪽 그림에서 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^a\{ax-(-x^2+ax)\}dx+\int_a^{2a}\{ax-(x^2-ax)\}dx$$

$$=\int_0^a x^2dx+\int_a^{2a}(-x^2+2ax)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_a^{2a}$$

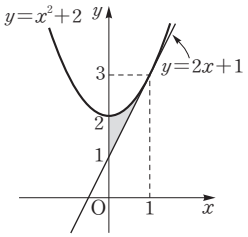
$$=\frac{1}{3}a^3+\frac{2}{3}a^3=a^3$$

즉, $a^3=\frac{27}{8}$이므로 $a=\frac{3}{2}$ 답 ③

0856 $f(x)=x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot 1=2$이고, 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$

$\therefore y=2x+1$



따라서 구하는 넓이는

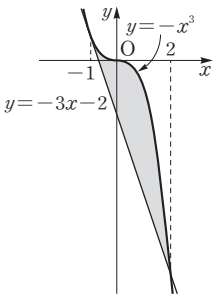
$$\int_0^1\{(x^2+2)-(2x+1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

0857 $f(x)=-x^3$으로 놓으면 $f'(x)=-3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-3\cdot(-1)^2=-3$이고 접선의 방정식은

$y-1=-3(x+1)$

$\therefore y=-3x-2$



곡선 $y=-x^3$과 직선 $y=-3x-2$의 교점의 x좌표는 $-x^3=-3x-2$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^2\{-x^3-(-3x-2)\}dx=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{27}{4}$$

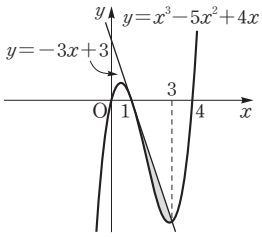
$\therefore 4S=4\cdot\frac{27}{4}=27$ 답 ③

0858 $f(x)=x(x-1)(x-4)=x^3-5x^2+4x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10x+4$이므로 곡선 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $3\cdot 1^2-10\cdot 1+4=-3$이고 접선의 방정식은

$y-0=-3(x-1)$

$\therefore y=-3x+3$ ㉮

곡선 $y=x^3-5x^2+4x$와 직선 $y=-3x+3$의 교점의 x좌표는



$x^3-5x^2+4x=-3x+3$에서

$x^3-5x^2+7x-3=0$

$(x-1)^2(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ ㉯

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\{(-3x+3)-(x^3-5x^2+4x)\}dx$$

$$=\int_1^3(-x^3+5x^2-7x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x\right]_1^3$$

$$=\frac{4}{3}$$ ㉰

답 $\frac{4}{3}$

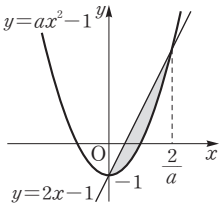
단계	채점요소	배점
㉮	접선의 방정식 구하기	30 %
㉯	곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기	30 %
㉰	넓이 구하기	40 %

0859 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot 1=2$이고 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$

$\therefore y=2x-1$

곡선 $y=ax^2-1$ $(a>0)$과 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는



$ax^2-1=2x-1$에서

$ax^2-2x=0$, $x(ax-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

따라서 주어진 접선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{a}}\{(2x-1)-(ax^2-1)\}dx=\int_0^{\frac{2}{a}}(2x-ax^2)dx$$

$$=\left[x^2-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{a}}$$

$$=\frac{4}{a^2}-\frac{8}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}$$

즉, $\frac{4}{3a^2}=\frac{4}{3}$이므로 $a^2=1$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 1

0860 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-3-t^2=2t(1-t)$

$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

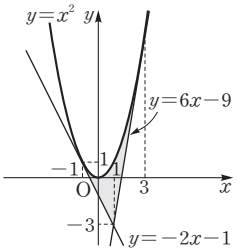
(i) $t=-1$일 때, ㉠에서

$y-1=-2(x+1)$

$\therefore y=-2x-1$

(ii) $t=3$일 때, ㉠에서

$y-9=6(x-3)$ $\therefore y=6x-9$



두 직선 $y=-2x-1$, $y=6x-9$의 교점의 x좌표는 $-2x-1=6x-9$에서 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$

$\displaystyle=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$

$\displaystyle=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$

$\displaystyle=\frac{16}{3}$

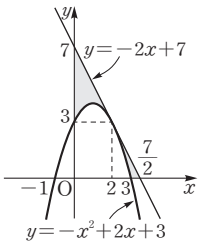
답 ⑤

0861 $f(x)=-x^2+2x+3$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+2$이므로 곡선 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $-2\cdot2+2=-2$이고 접선의 방정식은

$y-3=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+7$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot7-\int_{0}^{3}(-x^2+2x+3)dx$

$\displaystyle=\frac{49}{4}-\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3$

$\displaystyle=\frac{49}{4}-9$

$\displaystyle=\frac{13}{4}$

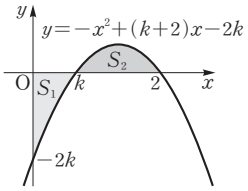
답 $\frac{13}{4}$

0862 곡선 $y=-x^2+(k+2)x-2k$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+(k+2)x-2k=0$에서

$x^2-(k+2)x+2k=0,\ (x-k)(x-2)=0$

$\therefore x=k$ 또는 $x=2$

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



$\displaystyle\int_{0}^{2}\{-x^2+(k+2)x-2k\}dx=0$

$\displaystyle\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2-2kx\right]_0^2=0$

$\displaystyle-\frac{8}{3}+2(k+2)-4k=0$

$\displaystyle-2k+\frac{4}{3}=0$ $\therefore k=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0863 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\displaystyle\int_{0}^{1}(x^3-a)dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{4}x^4-ax\right]_0^1=0,\ \frac{1}{4}-a=0$

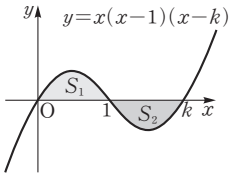
$\displaystyle\therefore a=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

0864 곡선 $y=x(x-1)(x-k)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-1)(x-k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=k$

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



$\displaystyle\int_{0}^{k}x(x-1)(x-k)dx=0$

$\displaystyle\int_{0}^{k}\{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=0$

$\displaystyle-\frac{k^4}{12}+\frac{k^3}{6}=0,\ k^3(k-2)=0$

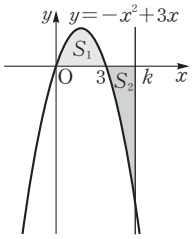
$\therefore k=2\ (\because k>1)$

답 2

0865 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=0$에서 $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



$\displaystyle\int_{0}^{k}(-x^2+3x)dx=0$

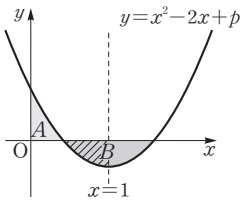
$\displaystyle\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^k=0$

$\displaystyle-\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2=0,\ k^2(2k-9)=0$

$\displaystyle\therefore k=\frac{9}{2}\ (\because k>3)$

답 $\frac{9}{2}$

0866 $A:B=1:2$에서 $B=2A$이고, B는 곡선 $y=x^2-2x+p$의 대칭축 $x=1$을 경계로 이등분되므로 오른쪽 그림에서 빗금친 도형의 넓이는 A와 같다.



$\therefore \int_0^1 (x^2-2x+p)dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+px\right]_0^1=0$

$\frac{1}{3}-1+p=0 \quad \therefore p=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

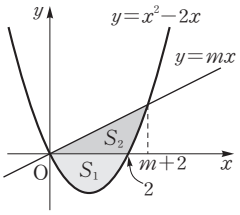
0867 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=mx$에서

$x^2-(m+2)x=0,\ x\{x-(m+2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m+2$

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이고



$S_1=-\int_0^2 (x^2-2x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

$S_1+S_2=\int_0^{m+2}\{mx-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_0^{m+2}\{-x^2+(m+2)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+2}{2}x^2\right]_0^{m+2}=\frac{1}{6}(m+2)^3$

즉, $\frac{1}{6}(m+2)^3=2\cdot\frac{4}{3}$이므로

$(m+2)^3=16$ 답 **16**

0868 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

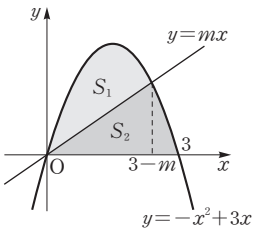
$-x^2+3x=mx$에서

$x^2+(m-3)x=0$

$x(x+m-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3-m$

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이고



$S_1=\int_0^{3-m}\{(-x^2+3x)-mx\}dx$

$=\int_0^{3-m}\{-x^2+(3-m)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3-m}{2}x^2\right]_0^{3-m}$

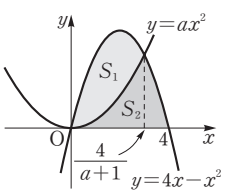
$=\frac{1}{6}(3-m)^3$

$S_1+S_2=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

즉, $\frac{1}{6}(3-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}$이므로 $(3-m)^3=\frac{27}{2}$

$\therefore m^3-9m^2+27m=\frac{27}{2}$ 답 $\frac{27}{2}$

0869 오른쪽 그림에서 곡선 $y=4x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$S_1+S_2=\int_0^4(4x-x^2)dx$

$=\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=\frac{32}{3}$

$\therefore S_1=S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

두 곡선 $y=ax^2$, $y=4x-x^2$의 교점의 x좌표는

$ax^2=4x-x^2$에서

$(a+1)x^2-4x=0,\ x\{(a+1)x-4\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{a+1}$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$S_1=\int_0^{\frac{4}{a+1}}\{(4x-x^2)-ax^2\}dx$

$=\int_0^{\frac{4}{a+1}}\{4x-(a+1)x^2\}dx$

$=\left[2x^2-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^{\frac{4}{a+1}}$

$=\frac{32}{3(a+1)^2}$

즉, $\frac{32}{3(a+1)^2}=\frac{16}{3}$이므로

$(a+1)^2=2 \quad \therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$ 답 ①

0870 $v(t)=0$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾸므로

$t^2-7t+10=0,\ (t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 $t=5$에서 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌므로 이때의 점 P의 위치는

$\int_0^5(t^2-7t+10)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_0^5$

$=\frac{25}{6}$ 답 ②

0871 $t=4$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^4(t^2-3t+2)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}=6$ 답 **6**

0872 3초 후 물체의 높이는

$30+\int_0^3(20-10t)dt=30+\left[20t-5t^2\right]_0^3$

$=30+15=45\,(\mathrm{m})$

$\therefore h_1=45$ ..... ㉮

물체가 최고 지점에 도착할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=20-10t=0$에서 $t=2$

$t=2$일 때 물체의 높이는

$30+\int_0^2(20-10t)dt=30+\left[20t-5t^2\right]_0^2$

$=30+20=50\,(\mathrm{m})$

$\therefore h_2=50$ ..... ㉯

$\therefore\ |h_1-h_2|=5$ ㉢

답 **5**

단계	채점요소	배점
㉮	h_1의 값 구하기	40 %
㉯	h_2의 값 구하기	40 %
㉰	$\lvert h_1-h_2\rvert$의 값 구하기	20 %

0873 $v(t)=0$일 때, 물이 멈추므로

$4t-t^2=0,\ t(4-t)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 물의 양은

$$\pi\int_0^4(4t-t^2)dt=\pi\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4$$
$$=\frac{32}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

답 $\frac{32}{3}\pi$ **cm**^{3}

0874 자동차 A의 출발점을 원점이라 하면 자동차 B의 출발점의 위치는 24이다. 출발한 지 t초 후의 두 자동차 A, B의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=0+\int_0^t 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^t=t^2$$
$$x_B(t)=24+\int_0^t(t+1)dt$$
$$=24+\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2+t+24$$

$x_A(t)=x_B(t)$일 때 자동차 A와 자동차 B의 위치가 같아지므로

$t^2=\frac{1}{2}t^2+t+24,\ t^2-2t-48=0$

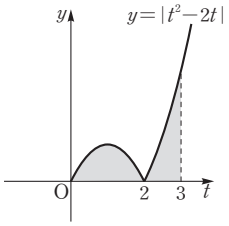
$(t-8)(t+6)=0$

$\therefore\ t=8\ (\because\ t>0)$

따라서 자동차 A와 자동차 B의 위치가 같아지는 것은 출발한 지 8초 후이다. 답 ③

0875 점 P가 원점을 출발하여 다시 원점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(t^2-2t)dt=0$$
$$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=0$$
$$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\ \frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$



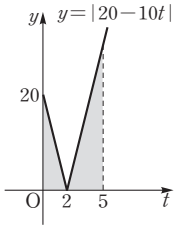
따라서 3초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|t^2-2t|dt=\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,(\mathrm{m})$$

답 $\frac{8}{3}$ **m**

0876 5초 동안 물체가 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt$$
$$=\int_0^5|20-10t|dt$$
$$=\int_0^2(20-10t)dt+\int_2^5(-20+10t)dt$$
$$=\left[20t-5t^2\right]_0^2+\left[-20t+5t^2\right]_2^5$$
$$=20+45$$
$$=65\,(\mathrm{m})$$



답 **65 m**

0877 $v(t)=0$일 때 열차가 정지하므로

$30-3t=0$에서 $t=10$

따라서 열차는 제동을 건 후 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10}|30-3t|dt=\int_0^{10}(30-3t)dt$$
$$=\left[30t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10}$$
$$=150\,(\mathrm{m})$$

답 ②

0878 4 km를 달리는 데 걸리는 시간을 x분이라 하면

$$4=\int_0^x\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$$

즉, $x^3+x^2+2x-16=0$에서

$(x-2)(x^2+3x+8)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x^2+3x+8\neq0)$

이때 $v(2)=\frac{3}{4}\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이므로 2분 후부터는 속력이 $\frac{9}{2}$ km/min으로 일정하다.

따라서 열차가 출발한 후 10분 동안 달린 거리는

$4+(10-2)\cdot\frac{9}{2}=40\,(\mathrm{km})$

답 **40 km**

0879 점 P가 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 직선 $t=0$, $t=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+1\cdot2+2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\right)=1+2+1=4$$

답 **4**

0880 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$$

$\therefore\ a=1$ ㉮

시각 $t=4$에서 점 P의 위치는

$\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=0$

$\therefore b=0$ ..... ㉯

$\therefore a+b=1$ ..... ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	40 %
㉯	b의 값 구하기	40 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	20 %

0881 시각 $t=7$에서 점 P의 위치는

$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot k-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot k$

즉, $2k-2+k=10$이므로

$3k=12 \quad \therefore k=4$

답 ④

0882 ㄱ. 출발한 지 4초 후의 점 P의 위치는

$0+\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=0$

이므로 원점이다.

ㄴ. 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌는 점에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 점 P는 시각 $t=2$와 $t=6$에서 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. 출발한 지 1초 후의 점 P의 위치는

$\int_0^1 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

출발한 지 7초 후의 점 P의 위치는

$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=-1$

즉, 출발한 지 1초 후와 7초 후의 점 P의 위치는 다르다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0883 ① $a\le t\le b$에서 $v(t)\ge0$이므로 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b v(t)dt$이다.

② $\int_0^c v(t)dt=0$이면 시각 $t=0$에서 $t=c$까지의 위치의 변화량이 0이다. 따라서 시각 $t=c$일 때 점 P는 출발점과 같은 위치에 있다.

③ 시각 $t=a$일 때 $v'(t)=0$이므로 $v(t)$는 $t=a$에서 극대이다. 따라서 점 P는 $t=a$일 때 최고의 속도로 움직이고 있다.

④ $v(t)$의 부호는 운동 방향을 나타낸다.

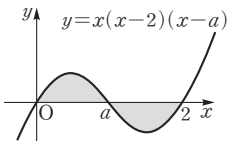
⑤ (속력)$=|v(t)|$이므로 $t=c$일 때, 점 P의 속력은 최대이다.

답 ③

유형 up

본문 133쪽

0884 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$S(a)$

$=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx-\int_a^2 x(x-2)(x-a)dx$

$=\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$\quad-\int_a^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_a^2$

$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$

이때 양변을 a에 대하여 미분하면

$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$

$=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$

$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$

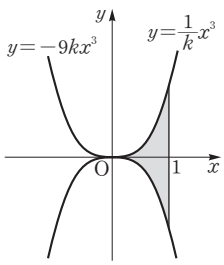
$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<2$)

a	(0)	…	1	…	(2)
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다.

답 1

0885 두 곡선 $y=\frac{1}{k}x^3$, $y=-9kx^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^1\left\{\frac{1}{k}x^3-(-9kx^3)\right\}dx$

$=\left(9k+\frac{1}{k}\right)\int_0^1 x^3dx$

$=\left(9k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}\left(9k+\frac{1}{k}\right)$

$\ge\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{9k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{3}{2}$ ($\because k>0$)

$\left(\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

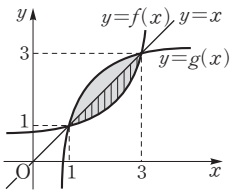
0886 오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금친 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}(1+3)\cdot 2-\int_1^3 f(x)dx$

$=4-3=1$

따라서 구하는 넓이는 빗금친 도형의 넓이의 2배이므로

$2\cdot 1=2$



답 **2**

0887 함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서

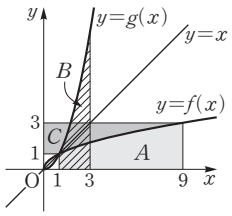
$B=C$이므로

$\int_1^9 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx$

$=A+B=A+C$

$=9\cdot 3-1\cdot 1$

$=26$



답 **26**

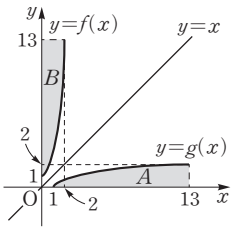
0888 $f(x)=3x^2+1\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 A와 같고 $A=B$이므로

$2\cdot 13-\int_0^2 (3x^2+1)dx$

$=26-\left[x^3+x\right]_0^2$

$=26-(8+2)$

$=16$



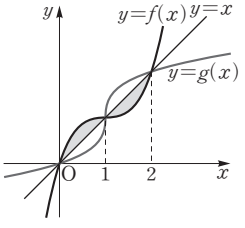
답 **16**

0889 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x=x$에서

$x^3-3x^2+2x=0,\ x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



$\therefore S=2\left[\int_0^1 \{(x^3-3x^2+3x)-x\}dx+\int_1^2 \{x-(x^3-3x^2+3x)\}dx\right]$

$=2\left\{\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx\right\}$

$=2\left(\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2\right)$

$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$

답 **1**

시험에 꼭 나오는 문제

본문 134~136쪽

0890 곡선 $y=x(x-2)^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-2)^2=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

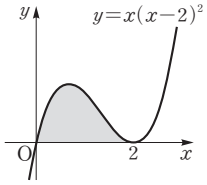
따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2 x(x-2)^2dx$

$=\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$

$=\frac{4}{3}$



답 ②

0891 곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

색칠한 도형의 넓이는

$-\int_0^2 (x^2-2x)dx+\int_2^a (x^2-2x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^a$

$=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{4}{3}$

$=\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\ a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>2)$

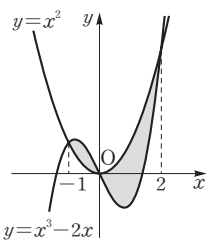
답 **3**

0892 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

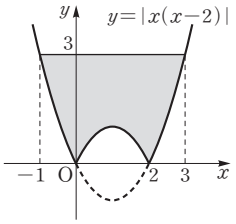
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ④

0893 $y=|x(x-2)|=\begin{cases}x(x-2) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x(x-2) & (0\le x\le 2)\end{cases}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{3-(x^2-2x)\}dx+\int_{0}^{2}\{3-(-x^2+2x)\}dx+\int_{2}^{3}\{3-(x^2-2x)\}dx$$



$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x+3)dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x+3)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{14}{3}+\frac{5}{3}=8$$

답 8

0894 $f(0)=c$이므로 곡선 $y=f(x)$와 $x=0$에서 접하는 직선의 방정식은 $y=c$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$가 $x=0$에서 접하고 $x=1$에서 만나므로

$f(x)-c=x^2(x-1)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{c-f(x)\}dx=\int_{0}^{1}\{-x^2(x-1)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{1}(x^3-x^2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{12}$$

답 ①

0895 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=x$이므로 곡선 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 2이고 접선의 방정식은

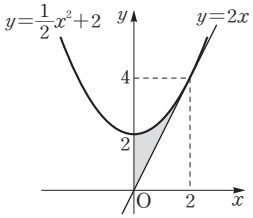
$y-4=2(x-2)$ $\therefore y=2x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-2x\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{4}{3}$$



답 $\frac{4}{3}$

0896 두 곡선 $y=x^2(x-4)$, $y=ax(x-4)$는 x축과 $x=0$, $x=4$인 점에서 만난다.

이때 $A=B$이므로

$$\int_{0}^{4}\{x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{4}\{x^3-(4+a)x^2+4ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4+a}{3}x^3+2ax^2\right]_{0}^{4}=0$$

$$-\frac{64}{3}+\frac{32}{3}a=0 \qquad \therefore a=2$$

답 **2**

0897 $A=B$이므로

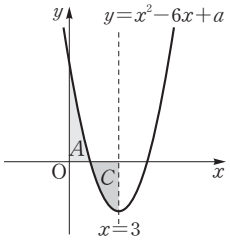
$$\int_{0}^{2}\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx=0$$

$$\left[\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{2}=2k-\frac{4}{3}=0$$

따라서 $k=\frac{2}{3}$이므로 $30k=20$

답 **20**

0898 $A:B=1:2$에서 $B=2A$이고, B는 $y=x^2-6x+a$의 대칭축 $x=3$에 의하여 이등분되므로 오른쪽 그림에서 두 도형의 넓이 A와 C는 서로 같다. 즉,



$$\int_{0}^{3}(x^2-6x+a)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+ax\right]_{0}^{3}=0$$

$3a-18=0$ $\therefore a=6$

답 **6**

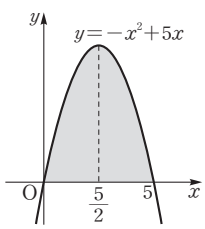
0899 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=-2x$에서

$x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=5$

따라서 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=-2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{5}\{(-x^2+3x)-(-2x)\}dx=\int_{0}^{5}(-x^2+5x)dx$$

이것은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다. 이때 이 넓이를 이등분하는 직선 $x=a$는 포물선 $y=-x^2+5x$의 대칭축이어야 하므로



$$y=-x^2+5x=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

에서 $x=\frac{5}{2}$이다. $\therefore a=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0900 x초 후에 다시 만난다고 하면 두 점 P, Q의 x초 후의 위치는 같다.

x초 후의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$\int_0^x t(t-1)dt$, $\int_0^x (2t+3)dt$이므로

$\int_0^x t(t-1)dt=\int_0^x (2t+3)dt$에서

$\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\left[t^2+3t\right]_0^x$

$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2=x^2+3x$

$2x^3-9x^2-18x=0$

$x(x-6)(2x+3)=0$

$\therefore x=6\ (\because x>0)$

따라서 두 점 P, Q가 다시 만나는 시각은 6초 후이다. 답 ③

0901 점 P가 진행 방향을 바꾸는 시각은

$v(t)=t^2-5t+4=0$에서

$(t-1)(t-4)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=4$

ㄱ. $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$

$1\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$

$t\ge 4$에서 $v(t)\ge 0$

이므로 시각 $t=0$에서의 진행 방향과 반대 방향으로 움직이는 때는 시각 $t=1$부터 $t=4$까지의 3초 동안이다.

ㄴ. 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (t^2-5t+4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^2=\frac{2}{3}$

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3 |t^2-5t+4|dt$

$=\int_0^1 (t^2-5t+4)dt-\int_1^3 (t^2-5t+4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^3$

$=\frac{11}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{31}{6}$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0902 ㄱ. $0<t<3$일 때 $v(t)>0$, $3<t<6$일 때 $v(t)<0$

즉, 시각 $t=3$에서 속도가 양에서 음으로 바뀌었으므로 $t=4$일 때, 물체는 처음 진행 방향과 반대 방향으로 움직인다.

ㄴ. 물체가 원점을 출발하였으므로 $t=0$일 때 물체의 위치는 0이고, $t=3$에서 물체의 위치는

$0+\int_0^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$

즉, 시각 $t=3$에서 물체는 원점에 있지 않다.

ㄷ. $\int_1^5 v(t)dt=\int_1^3 v(t)dt+\int_3^5 v(t)dt$

$=\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

이므로 시각 $t=1$에서와 $t=5$에서의 물체의 위치는 같다.

ㄹ. 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 실제로 움직인 거리는

$\int_1^4 |v(t)|dt=\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 \{-v(t)\}dt$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0903 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $x^3+x^2+x=x$에서

$x^3+x^2=0$, $x^2(x+1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$S=2\int_{-1}^0 \{f(x)-x\}dx$

$=2\int_{-1}^0 (x^3+x^2)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0$

$=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0904 곡선 $y=ax^2+bx+c$의 y절편이 3이므로 $c=3$ ㉮

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$a(x-1)(x-3)=0$

$ax^2-4ax+3a=0$

$3a=c=3$이므로 $a=1$

$-4a=b$이므로 $b=-4$ ㉯

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^1 (x^2-4x+3)dx-\int_1^3 (x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$

$=\frac{8}{3}$ ㉰

답 $\frac{8}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	c의 값 구하기	20 %
㉯	a, b의 값 구하기	30 %
㉰	도형의 넓이 구하기	50 %

0905 $f(x)=x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 접선의 기울기는 $3t^2$이므로

접선의 방정식은

$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$ ····· ㉠

이 접선이 원점을 지나므로 $0-(t^3+2)=3t^2(0-t)$

$t^3=1 \quad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $y-3=3(x-1)$

$\therefore y=3x$

㉮

이때 접선과 곡선의 교점의 x좌표는 $x^3+2=3x$에서

$x^3-3x+2=0,\ (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

㉯

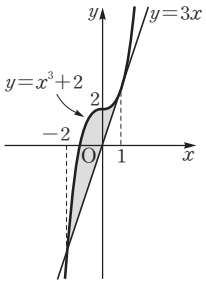
따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{1}(x^3+2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+2x-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{1}$

$=\frac{27}{4}$

㉰



답 $\frac{27}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	접선의 방정식 구하기	40 %
㉯	접선과 곡선의 교점의 x좌표 구하기	20 %
㉰	접선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

0906 (1) $x(1)=-2+\int_0^1 v(t)dt=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

㉮

$x(3)=-2+\int_0^3 v(t)dt=-2+4=2$

㉯

$x(5)=-2+\int_0^5 v(t)dt=-2+7=5$

㉰

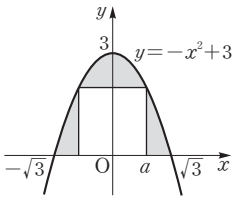
(2) $\int_0^6 |v(t)|dt=\frac{1}{2}(2+5)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=8$

㉱

답 (1) $-\frac{3}{2}$, 2, 5 (2) 8

단계	채점요소	배점
㉮	$x(1)$ 구하기	20 %
㉯	$x(3)$ 구하기	20 %
㉰	$x(5)$ 구하기	20 %
㉱	$t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리 구하기	40 %

0907 직사각형의 넓이가 최대이면 색칠한 도형의 넓이가 최소이다. 오른쪽 그림과 같이 x축의 양의 부분과 만나는 직사각형의 꼭짓점의 x좌표를 a라 하면 직사각형의 넓이 $g(a)$는



$g(a)=2a(-a^2+3)$

$=-2a^3+6a$

㉮

$g'(a)=-6a^2+6=0$에서 $a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 $g(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$g(1)=4$

㉯

또한 곡선 $y=-x^2+3$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=4\sqrt{3}$

㉰

따라서 색칠한 도형의 넓이의 최솟값은

$4\sqrt{3}-4$

㉱

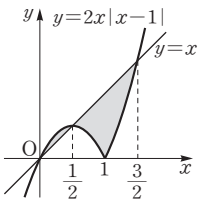
답 $4\sqrt{3}-4$

단계	채점요소	배점
㉮	직사각형의 넓이 구하기	30 %
㉯	직사각형의 넓이의 최댓값 구하기	30 %
㉰	곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
㉱	색칠한 도형의 넓이의 최솟값 구하기	10 %

0908 $y=2x|x-1|$

$=\begin{cases} 2x(x-1) & (x\geq 1) \\ -2x(x-1) & (x\leq 1) \end{cases}$

이므로 곡선 $y=2x|x-1|$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 다음과 같다.



(i) $x\geq 1$일 때, $2x(x-1)=x$에서

$2x^2-3x=0,\ x(2x-3)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}\ (\because x\geq 1)$

(ii) $x\leq 1$일 때, $-2x(x-1)=x$에서

$2x^2-x=0,\ x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이의 합은

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x^2+2x-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{x-(-2x^2+2x)\}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\{x-(2x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x^2+x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-x)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x^2+3x)dx$$

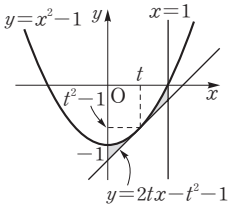
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{5}{24}+\frac{7}{24}=\frac{13}{24}$$ 답 **$\frac{13}{24}$**

0909 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 위의 점 (t, t^2-1)에서의 접선의 기울기는 $2t$이고 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2-1$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$$\int_0^1\{(x^2-1)-(2tx-t^2-1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2tx+t^2)dx$$

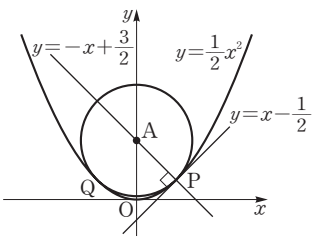
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-t+t^2$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다. 답 **$\frac{1}{12}$**

0910 두 곡선의 교점의 좌표를 각각 $\mathrm{P}\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)$이라 하자. (단, $\alpha>0$)



$f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $f'(x)=x$이므로

함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=\alpha$이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.

즉, $\frac{\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}}{\alpha-0}=-\frac{1}{\alpha}$이므로

$\alpha^2=1$ $\therefore \alpha=1$ ($\because \alpha>0$)

$\therefore \mathrm{P}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

직선 AP의 방정식은 $y=-x+\frac{3}{2}$

한편, 접점 P에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=x-1$ $\therefore y=x-\frac{1}{2}$

원의 반지름의 길이는 중심 $\mathrm{A}\left(0, \frac{3}{2}\right)$과 접선 $y=x-\frac{1}{2}$, 즉 $2x-2y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{\left|2\cdot0-2\cdot\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}$$

$\angle\mathrm{PAO}=45^\circ$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\left\{\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{45}{360}\right\}$$

$$=2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$120(a+b)=140$ 답 **140**

0911 곡선 $f(x)=-x^2+4x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x-3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$$\int_0^a f(x)dx=-X+Y-Z=-2Y+Y=-Y$$

$$=-\int_1^3 f(x)dx=-\int_1^3(-x^2+4x-3)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=-\frac{4}{3}$$ 답 **$-\frac{4}{3}$**

memo

memo